

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER
INTERNATIONALEN
ASTRONAUTISCHEN
FÖDERATION

OFFICIAL JOURNAL OF THE
INTERNATIONAL
ASTRONAUTICAL
FEDERATION

ORGANE OFFICIEL DE LA
FÉDÉRATION
INTERNATIONALE
D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. • A. EULA-Roma
J. M. J. KOOY-Breda • E. SÄNGER-Stuttgart • K. SCHÜTTE-München
L. R. SHEPHERD-Chilton • J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTLEITUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF

F. HECHT-Wien

FACHBEIRAT / ADVISORY BOARD / COMITÉ DE CONSEIL

J. ACKERET-Zürich • A. D. BAXTER-Cranfield • E. R. BERGAUST-Arlington/Va.
G. P. CASIRAGHI-Genova • A. V. CLEAVER-London • G. A. CROCCO-Roma
R. ENGEL-Héliopolis • J. EUGSTER-Bern • H. GARTMANN-Bad Soden
W. GEORGII-Mendoza • F. GERLACH-Bad Godesberg • H. HOHN-Wien
TH. v. KÁRMÁN-Paris • K. KREJCI-GRAF-Frankfurt/Main
D. F. LAWDEN-Birmingham • F. I. MALINA-Paris • D. F. MARTYN-Sydney
H. NOWOTNY-Wien • H. OBERTH-Feucht b. Nürnberg • F. I. ORDWAY-New York
E. ROESGER-Köln-Lindenthal • I. SÄNGER-BREDT-Stuttgart
W. SCHAUB-Ferndorf • T. TABANERA-Buenos Aires • B. THÜRING-Karlsruhe
H. S. TSIEN-Pasadena/Calif. • E. VASSY-Paris

VOL. I

MIT 49 ABBILDUNGEN / WITH 49 FIGURES / AVEC 49 FIGURES



SPRINGER-VERLAG · WIEN

I. R. MAXWELL & CO. LTD. · LONDON/PARIS/NEW YORK

1955

Vol.
1
1955

Vo
1
19

Inhalt — Contents — Sommaire

Boni, A.: Artificial Satellite, Unification and Mechanics (Sidar-Mechanics) (With 5 Figures)	120
Braun, W. von: Statement	1
Ehrcke, K. A.: On the Descent of Winged Orbital Vehicles (With 14 Figures) .	137
Eugster, J.: Über den Nachweis von schweren Primären der kosmischen Strahlung mittels einer Farbstoffmethode (Mit 4 Abbildungen)	57
Kaeppler, H. J.: Über den Transport von Translationsenergie bei Kurzzeit- vorgängen	111
— Über eine simultane analytische Integration der Bewegungsgleichungen eines geflügelten Gerätes im Überschallgleitflug	166
Kooy, J. M. J.: Thermodynamic Theory of Rocket Motor with Hydrazine and Nitric Acid as Fuels (With 1 Figure)	157
— On the Calculation of the Powered Flight of a Long Range Rocket, Supervised by an Automatic Pilot (With 4 Figures)	191
Lawden, D. F.: Optimal Programming of Rocket Thrust Direction (With 3 Figures)	41
— Optimal Transfer Between Circular Orbits About Two Planets (With 1 Figure)	89
— Optimum Launching of a Rocket Into an Orbit About the Earth (With 1 Figure)	185
Romick, D. C.: A Suggested Organization of Space Flight Sciences	199
Sänger, E.: Stationäre Kernverbrennung in Raketen (Mit 7 Abbildungen) . .	61
Sänger-Bredt, Irene: Die Erforschung der Initialvorgänge bei Verbrennungs- prozessen	3
Schaefer, H. J.: Protection of Humans from Heavy Nuclei of Cosmic Radiation in Regions Outside the Atmosphere (With 3 Figures)	100
Singer, S. F.: Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE). Part I. Geophysical and Astrophysical Applications (With 3 Figures)	171
Strughold, H.: Space Equivalent Conditions Within the Earth's Atmosphere. Physiological Aspects (With 3 Figures)	32

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß (Besprochen von E. DOLEZAL)	209
SÄNGER, E.: Die Wege des Strahlfluges (Besprochen von F. HECHT)	209
Space Flight Problems — Probleme der Weltraumforschung — Problèmes d'astronautique (Besprochen von E. DOLEZAL)	156

Vd
1
19

Statement

The feasibility of flight through outer space is no longer a topic for academic debate. High-altitude rockets have repeatedly risen beyond the upper fringes of the atmosphere and have shown that rockets can be propelled and guided through the vacuum of outer space. Even animals have been carried aloft in such flights and they are in as good a state of health today as they have ever been before.

From the engineering aspect, manned space flight and its ultimate purpose — voyages to the moon and the nearer planets — are merely a logical extrapolation of the present art of rocketry. Admittedly, it is a bold extrapolation: The moon ship of the future will compare to a present-day high-altitude rocket as a modern transatlantique airliner compares to a sail-and-wire aeroplane of 1910. The same ingredients are required to make space flight as successful as aviation: Devotion on the part of its protagonists, money and a determined step-by-step program.

Research will play a vital part in Man's imminent conquest of space. It will have to provide the answers for many still open questions, not only in the realm of engineering, but even more in adjacent fields such as aviation medicine, radiology, meteor research, and others. In a revolutionary new technological endeavor, — such as aviation was 50 years ago, or as astronautics is today — the supporting sciences involved have to fight for their recognition and respectability. Thus, it is hardly unusual that we space flight protagonists are occasionally frowned upon by members of the older scientific fraternities. We should not bother about this, however, for the younger generation is on our side. The time is here when it is no longer possible to argue about the feasibility of commercial aviation. Soon the time will come when it will no longer be respectable to raise doubt at the feasibility of astronautics.

Wernher von Braun

Vd
1
19

Die Erforschung der Initialvorgänge bei Verbrennungsprozessen¹

Von

Irene Sänger-Bredt, Stuttgart², GfW

Zusammenfassung. Im Brennpunkt des Interesses der Strahltriebtechnik stehen gegenwärtig die eigentlich chemischen und die kernchemischen Verbrennungsprozesse im Wettbewerb miteinander.

Während die Erforschung der Kernreaktionen den folgerichtigen Weg von der individuellen Einzelreaktion kollidierender Kerne zu den Gleichgewichtsgesetzen reagierender Massen ging, beschritt die Forschung chemischer Molekülreaktionen historisch den umgekehrten Weg, indem sie zunächst Gleichgewichtszustände und Massenwirkungsgesetze im makroskopischen Gasraum untersuchte und sich erst in jüngster Zeit unmittelbar dem Mechanismus der eigentlichen Reaktion beim einzelnen Molekülstoß zuwandte, so daß dieser grundlegende Schlüssel zum Verständnis chemischer Verbrennungsprozesse heute noch praktisch fehlt.

In der vorliegenden Arbeit werden die bisherigen experimentellen Verfahren zum Studium des letztgenannten Problems und ihre Ergebnisse hinsichtlich ihrer Eignung, eine Antwort auf die Frage nach der primären Erscheinungsform exothermer Reaktionsenergie unmittelbar nach dem Reaktionsstoß zu geben, kritisch untersucht. Anschließend wird die Methode gekreuzter Molekularstrahlen als konsequenteres Verfahren in der eingeschlagenen Entwicklungsrichtung ausführlich erörtert und als aussichtsreich befunden.

Abstract. Chemical combustion processes and nuclear reactions are the competing energy sources that command our attention in the field of rocket propulsion.

While research on nuclear reactions began with the study of individual nuclear collisions and proceeded to the laws governing reactions in bulk matter (e. g., thermonuclear reactions), the investigation of molecular reactions has had an opposite historical development. In the latter case, equilibria and the laws of mass action in large gaseous volumes were considered first and only recently have advances been made in the study of the mechanism of the actual reaction occurring in individual molecular encounters, so that this route towards the fundamental understanding of combustion processes has been practically unexplored until now.

In this paper, we examine the experimental methods which have been applied to resolve this latter problem and discuss their results in the light of their value in resolving the question of the form, in which exothermic reaction energy is initially manifested, at the moment of its release. Finally we discuss the method of crossed molecular beams, a logical outcome of present research-development trends, and estimate that it could give satisfactory results.

Résumé. Actuellement c'est l'exploitation des processus rivalisants de combustion, c. à. d. celui de la combustion chimique proprement dite et celui de la combustion nucléaire, qui se trouve au centre de l'intérêt de la technique de propulsion à réaction.

Tandis que les études des réactions nucléaires se développaient d'une façon consécutive à partir de l'observation d'une réaction individuelle entre deux noyaux entrés en choc, jusqu'aux lois d'équilibre de l'interaction des masses, l'histoire de la recherche des réactions chimiques moléculaires se déroula dans le sens inverse en

¹ Vorgelegt beim V. I.A.F.-Kongreß in Innsbruck am 5. August 1954.

² Forschungsinstitut für Physik der Strahltriebtechnik, Stuttgart-Flughafen.

commençant tout d'abord par l'étude des états stationnaires et des lois d'action des masses dans un volume de gaz assez important avant de ne s'occuper qu'en dernier temps immédiatement du mécanisme de la réaction même au moment d'une collision singulière entre deux molécules. Ainsi la clef essentielle pour comprendre le comportement des combustions chimiques est restée pratiquement encore à l'ombre.

Dans le rapport présent on discute les procédés expérimentaux antérieurs pouvant éclaircir les problèmes qu'on vient d'esquisser, et les résultats obtenus par eux, à l'égard de leur valeur comme indicateur de la forme d'apparition initiale, dans laquelle se présente l'énergie exotherme d'une réaction immédiatement après sa libération par choc efficace. Ensuite on propose et analyse la méthode des rayons croisés moléculaires, qui devait être le procédé le plus logique dans le sens du développement historique de l'orientation des recherches et on arrive à la conclusion qu'elle est pleine de promesses.

I. Problemstellung

Ein Kernproblem der Raketenflugtechnik und damit der Astronautik ist die Verbrennung. Es ist beschämend für uns Menschen, einsehen zu müssen, daß ausgerechnet über diesen Prozeß, der am Anbeginn aller Technik stand, hinsichtlich seines eigentlichen, physikalischen Wesens so gut wie nichts bekannt ist.

Wir glauben zu wissen, daß die Verbrennung durch zufälliges Zusammentreffen von gasförmigen, zu exothermer chemischer Reaktion fähigen Molekülen eingeleitet wird. Wir glauben ferner, einiges zu kennen über die besonderen Stoßbedingungen, die zur Realisierung der exothermen Reaktion durch Stoß notwendig sind. Aber in welcher Form die Reaktionsenergie, also der eigentliche Nutzeffekt bei der Verbrennung, im Reaktionsprodukt frei wird, in welcher Form sie sich danach durch weitere Stöße den Molekülen der nächsten Umgebung unmittelbar mitteilt, wissen wir noch nicht.

Gerade diese initialen Vorgänge sind indes so ausschlaggebend für den gesamten weiteren Verlauf der Verbrennung und für ihre Begleiterscheinungen, daß wir sogar hoffen, bei ihrer Kenntnis alle diese Folgeerscheinungen — wenn auch nicht völlig bestimmen — so doch mindestens beeinflussen zu können, und damit vielleicht einmal auch solche Verbrennungsprozesse technischen Zwecken nutzbar zu machen, die zur Zeit noch als nicht beherrschbar gelten.

So sind es denn — umgekehrt — auch der *Ablauf der Verbrennung* (wie Reaktionsgeschwindigkeit, Temperatursteigerung, Gleichgewichts-Einstellzeiten usw. in Abhängigkeit von den reagierenden Stoffen und deren Zustandsgrößen, bzw. von katalysierenden Zusatzstoffen) und seine *Begleiterscheinungen* (wie Konvektion, Strahlung und Ionisation), die einigen Forschern die ersten Anhaltspunkte lieferten zu — allerdings durchaus noch nicht einheitlichen — Theorien über die Initialvorgänge bei der Verbrennung.

Dabei ist vielleicht zu bemerken, daß wir im Zeitalter der Raketen unter „Verbrennung“ nicht mehr ausschließlich „chemische Reaktionen unter Teilnahme von Sauerstoff“ verstehen, sondern alle Arten von Reaktionen, bei denen Energie frei wird, also alle exothermen Reaktionen schlechthin.

Da die in der molekularen Einzelreaktion freiwerdende Energie bei Wahrung des Impulssatzes nicht völlig auf einem einzigen Reaktionsprodukt verbleiben darf, können exotherme Reaktionen beim Fehlen von festen Grenzflächen nur im *Dreierstoß* mit einem neutralen dritten Stoßpartner, $A + B + N \rightarrow AB + N$, oder mittels *Austauschreaktionen*, $AB + C \rightarrow AC + B$, bzw. $A^* + B \rightarrow AB + h\nu$, stattfinden. Gegenstand der Forschung ist es zur Zeit noch, in welchem Prozentsatz und auf welche Freiheitsgrade die Reaktionsenergie sich in beiden Fällen den nach der Reaktion auseinanderfliegenden Teilchen mitteilt.

Den Zusammenhang zwischen den so beschriebenen Elementarprozessen und der makroskopischen Verbrennungserscheinung stellt man sich etwa folgendermaßen vor:

Der Ablauf einer Verbrennung mit anschließender Temperaturgleichgewichtseinstellung aller Freiheitsgrade erfolgt nicht einheitlich in stetiger Abhängigkeit von der Entfernung, die das betrachtete Volumenelement der Brennkammer vom Verbrennungsursprung hat, und in Abhängigkeit von der Aufenthaltsdauer des betrachteten Feuergasvolumenelementes im Ofen, sondern diese Entwicklung läuft — ebenso wie die vorangehende Gemischaufbereitung — in kleinen Reaktionszentren ab, die unabhängig voneinander im Feuerraum verteilt sind, und über deren mittlere Ausdehnung, durchschnittliche Verteilung und gegenseitige Abstände praktisch noch nichts bekannt ist; die auch nicht überall im Feuerraum gleich zu sein brauchen, sondern von Wandabstand, Strömungsweg und Aufbereitungsvorgängen abhängen können. Außerdem werden sich diese Reaktionszentren nicht alle gleichzeitig im selben Entwicklungsstadium befinden, sondern auch ihr „Alter“ wird mehr oder minder regellos verteilt sein. Noch verworrender wird das Erscheinungsbild, wenn man bedenkt, daß die Reaktionen bei den meisten technischen Verbrennungsprozessen nur sogenannte „Brutto“-Reaktionen sind, die sich aus einer Kette nicht immer bekannter Teilreaktionen zusammensetzen, für deren jede der hier skizzierte Ablauf gilt.

Eine systematische Erforschung der Gaskinetik von Verbrennungsvorgängen hätte sich darum auf zwei zunächst völlig voneinander getrennte Teilfragebereiche zu erstrecken, nämlich auf die Untersuchung

1. des durchschnittlichen *kinetischen* Entwicklungsverlaufs *eines* solchen Reaktionszentrums vom Zeitpunkt „Null“, das heißt vom Freiwerden der Reaktionsenergie an, bis zur Auflösung, das heißt bis zur Einstellung des Energiegleichgewichtes mit einer noch zu definierenden Umgebung sowie

2. der *statistischen* Gesetze des örtlichen und zeitlichen Zusammenspiels *aller* Reaktionszentren, aus denen sich das makroskopische Erscheinungsbild der Verbrennung ableiten läßt.

Von diesen beiden Fragebereichen ist der letztergenannte weitgehend der reinen Mathematik zugänglich, während der erste zunächst auf Versuchsergebnisse angewiesen ist, auf Grund deren erst physikalische Theorien möglich werden. Man wird in der Erfassung der Tatsachen um so rascher vorankommen, je schärfer es gelingt, die beiden Fragebereiche voneinander zu trennen, das heißt praktisch zunächst: je besser es gelingt, versuchsmäßig an den einzelnen Elementarprozeß heranzukommen. Die bisherige Forschung hat sich denn auch diesem Ziel Schritt für Schritt immer mehr genähert.

II. Kritischer Rückblick auf bekannte Versuchsmethoden

1. Messungen von Reaktionsgeschwindigkeiten im Strömungsrohr

Die ältesten Versuche in dieser Richtung, als deren Vater BODENSTEIN [1] anzusehen ist, arbeiteten noch mit größeren Gasräumen bei sehr mäßigen Translationstemperaturen unterhalb der Entflammung und unter Drucken von 1 bis 10^{-3} at. Bei diesen Versuchen strömten die Versuchsgase im Prinzip vom Augenblick ihrer Mischung an — bei konstant gehaltenen Temperaturen — durch ein langes Reaktionsrohr. Bestimmt wurden zunächst die Reaktionsgeschwindigkeit, bzw. die Geschwindigkeitskonstante k^1 der Reaktion mittels der in ver-

¹ Die Geschwindigkeitskonstante ist der Quotient aus der sekundlichen Konzentrationszunahme des Reaktionsproduktes und dem Produkt der n -ten Potenzen der Molkonzentrationen der Ausgangsstoffe, wobei n die jeweiligen Molzahlen der Ausgangsstoffe bedeutet, die zur Bildung eines Mols des Reaktionsproduktes notwendig sind.

schiedenen Abständen von der Mischstelle vorgenommenen Konzentrationsmessungen, wobei man die Konzentrationen entweder direkt durch Abzapfen und Unterkühlen von Gasproben oder mittelbar durch Druckmessungen, bzw. durch optische Verfahren zu bestimmen suchte. Aus der Veränderlichkeit der derart gemessenen Reaktionsgeschwindigkeit in Gegenwart verschiedenartiger, sogenannter „neutraler“ Zusatzgase wurden Rückschlüsse auf die Art des eigentlichen Reaktionsmechanismus gezogen, insbesondere auch auf die Formen, in denen die Reaktionsenergie nach ihrem Freiwerden bevorzugt zunächst auftritt und in der sie der Umgebung danach mitgeteilt wird. Zu den bekanntesten, mittels derartiger Methoden untersuchten Prozessen gehören die Rekombinationen von Wasserstoff, Jod und Brom im Dreierstoß sowie die thermische und die photochemische Bromwasserstoffbildung. Außer BODENSTEIN sind vor allem CHRISTIANSEN, JOST, POLANYI, RABINOWITSCH und STEINER mit Versuchen dieser Art hervorgetreten [2 bis 19].

Abgesehen von zufälligen Unzulänglichkeiten einzelner Versuchsanordnungen, die sich zum Beispiel darin äußern, daß die Reihenfolge der Wirksamkeit der untersuchten Zusatzgase auf die Dreierstoßausbeute nicht von allen Forschern übereinstimmend angegeben wird, kranken alle diese Anordnungen grundsätzlich daran, daß die beobachteten Vorgänge zu komplex sind, um absolut sichere Rückschlüsse auf mehr als auf die Bruttoreaktionsgeschwindigkeit zu gestatten. Die beobachteten bimolekularen Bruttoreaktionen sind in Wirklichkeit nämlich meist mehrstufige Reaktionen mit Kettenverzweigung. Selbst die einfachen Rekombinationsreaktionen vom Typ $2 A \rightarrow A_2$ kann man so auffassen, wenn man bedenkt, daß außer dem „neutralen“ Dreierstoßpartner auch Ausgangsstoffe und Endprodukte des reagierenden Gases als Dreierstoßpartner immer gleichzeitig auftreten, daß hochmolekulare Zusatzgase wie CCl_4 , CO_2 oder C_2H_6 den Dreierstoß nicht immer völlig ungeändert überstehen dürfen, und daß einige Gase, wie z. B. Wasserstoff, von vornherein in einem Gemisch verschiedenartiger Modifikationen mit verschiedenem Reaktionsverhalten vorliegen.

Man geht bei der Auswertung der eben beschriebenen Versuche von der Vorstellung aus, daß beim Dreierstoß der dritte Stoßpartner in den Wirkungsbereich eines instabilen, sogenannten „Quasimoleküls“ gerät, und versteht unter einem Quasimolekül zwei einander begegnende Moleküle während der Zeit des Aufenthaltes in der gegenseitigen Potentialmulde. Dabei sind selbst im Fall der einfachen Rekombination $2 A \rightarrow A_2$ (ohne Fremdgaszusatz) bereits drei Konstellationen für den Dreierstoß möglich, die alle zur Rekombination führen können, nämlich $A A + A_2$, $A A + A$ und $A A_2 + A$, in denen der erste Summand das Quasimolekül kennzeichnet und der zweite den dritten Stoßpartner. Theoretische Vergleichsberechnungen der Reaktionsgeschwindigkeit unter Zugrundelegung der eben beschriebenen Mechanik des Dreierstoßes und unter Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Anordnungen dieses Stoßes ergeben Geschwindigkeitskonstanten¹, die für die verschiedenen Konstellationen um Größenordnungen verschieden sein können infolge der verschieden einzusetzenden Werte für die reduzierten Massen, Stoßparameter und vor allem für die „Lebensdauer“ des Quasimoleküls. Die Unsicherheiten in der Abschätzung der beiden letzten Werte

$$^1 k = 8 \pi \cdot N_L^2 \cdot a \cdot k T \sqrt{\frac{m_A + m_B + m_C}{m_A \cdot m_B \cdot m_C}} \cdot \sigma_{AB}^2 \cdot \sigma_{(AB)C}^2 \cdot \tau_{AB}, \text{ worin } a \text{ die Stoßaus-}$$

beute für eine Stoßkonstellation $A B + C$ bedeutet; ferner seien $m = \frac{m_A + m_B + m_C}{m_A \cdot m_B \cdot m_C}$ die reduzierte Masse, σ_{AB} , bzw. $\sigma_{(AB)C}$ die Stoßparameter und τ_{AB} die Lebensdauer des Quasimoleküls (AB) bei der Dreierstoßkonstellation.

liegen leider in ähnlicher Höhe. Die makroskopisch meist allein in Erscheinung tretende *überwiegend höchste Reaktionsgeschwindigkeit eines* der verschiedenen nebeneinander stattfindenden und zu Rekombinationen führenden Prozesse ist durch die Konstellation bestimmt, die für Stoßparameter und Lebensdauer die höchsten und für die reduzierten Massen die geringsten Werte liefert. Ihrerseits gestatten die Versuche jedoch keine eindeutigen Rückschlüsse auf die für eine gemessene Reaktionsgeschwindigkeit wirklich verantwortliche Konstellation. Wenn ein bestimmtes neutrales Zusatzgas höhere Reaktionsgeschwindigkeiten bewirkt als ein anderes, oder — im Fall eines zusatzfreien Reaktionsgemisches — die sekundliche Konzentrationszunahme des Reaktionsproduktes gegen Ende der Reaktion nicht so stark abnimmt, wie die *alleinige Teilnahme* der vor Beginn der Reaktion bereits vorhandenen Gase am wirksamen Reaktionsstoß erwarten ließe, so kann dies einmal heißen, daß das betreffende Zusatzgas oder das inzwischen gebildete Reaktionsprodukt hinsichtlich ihrer Freiheitsgrade und Resonanzeigenschaften den geeigneten Stoßpartner zur Abführung der Reaktionsenergie abgeben (also die *Stoßausbeute* beim Dreierstoß erhöhen), aber auch ganz einfach, daß sie als Bestandteil des Quasimoleküls beispielsweise infolge ihrer größeren Masse und geringeren chemischen Affinität zum Partner die längste Lebensdauer des Quasimoleküls und damit die höchste *Zahl* der pro Volum- und Zeiteinheit möglichen Dreierstöße, die der Reaktionsgeschwindigkeit bei konstanter Stoßausbeute proportional ist, gewährleisten.

2. Messungen von Verzugszeiten bei der Gleichgewichtseinstellung

Unabhängig von den bisher geschilderten Konzentrationsänderungsmessungen an langsam verlaufenden Bruttoreaktionen, die — bei Voraussetzung geringer und quasistationärer Konzentrationen etwaiger instabiler Zwischenprodukte — über den eigentlichen Reaktionsmechanismus nur *mittelbare* Aussagen gestatteten an Hand von Unregelmäßigkeiten im Verlauf der Reaktionsgeschwindigkeit über den Konzentrationsabnahmen der Reaktionsteilnehmer, begann man zu Anfang der dreißiger Jahre den *Mechanismus des intermolekularen Energieaustausches*, der für die Reaktionsgeschwindigkeit hauptverantwortlich ist, *unmittelbar* systematisch zu untersuchen. Auf Grund einer von KNESER [21, 22] ausgearbeiteten Erweiterung der EINSTEINSchen Schalldispersionstheorie für dissoziierende Gasgemische [20] auch *auf Fälle thermisch angeregter, einheitlicher Gase* gelang es besonders EUCKEN und seinen Mitarbeitern [23 bis 35], für eine große Anzahl reiner Gase und technischer Gasgemische die Einstellgeschwindigkeiten des Gleichgewichtes in den verschiedenen Freiheitsgraden zu messen, und daraus zu berechnen, der wievielte gaskinetische Stoß auf ein Molekül im Durchschnitt fähig ist, die relative Translationsenergie der Stoßpartner in Rotation, Schwingung, Dissoziation, Elektronenanregung oder Ionisation der gestoßenen Teilchen zu verwandeln. Das Prinzip der Messungen besteht, ganz grob geschildert, in folgendem: Bei Beschickung eines Gases mit hochfrequenten Schallwellen (10^2 bis 10^9 Hz) ist die Zeit zwischen Verdichtung und Verdünnung des Mediums unter Umständen nicht mehr ausreichend für eine Anpassung der inneren Freiheitsgrade der Gasmoleküle an die sich periodisch ändernde Translationsenergie. Von einer bestimmten Schallfrequenz an aufwärts beginnt daher die Molwärme des Gases Fehlbeträge gegenüber der Theorie aufzuweisen, die durch Messung der Schallgeschwindigkeit (oder auch aus der Absorptionsintensität des Schalles) bei bekannter Translationstemperatur des Gases erfaßt werden können. Aus der Lage des Wendepunktes der Kurve für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit (oder der Lage des Maximums der Absorptionsintensität) über der Schallfrequenz lassen sich bei Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderung daher die genauen

Zeiten ermitteln, welche die inneren Freiheitsgrade zur völligen oder quantenweisen Einspielung ihrer Gleichgewichte brauchen. Der Reziprokwert einer solchen Einstellzeit τ für ein Quant eines einzelnen Freiheitsgrades ist gleich dem Produkt aus der sekundlichen Stoßzahl Z eines Moleküls und der Differenz der Übergangswahrscheinlichkeiten P_{01} bzw. P_{10} für Dämpfung und Anregung eines Energiequants des betrachteten Freiheitsgrades aus der ungequantelten Translationsenergie beim Stoß: $1/\tau = Z(P_{10} - P_{01})$. Den Kehrwert der Übergangswahrscheinlichkeit pflegt man als wirksame Stoßzahl Z^* zu bezeichnen. Aus dem BOLTZMANNSchen H -Theorem folgt weiterhin, daß bei völlig in Zweierstößen möglichem Energieaustausch und MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle die wirksame Stoßzahl für *Dämpfung* immer um eine berechenbare Funktion von $e^{-\varepsilon/kT}$ kleiner ist als die für den entsprechenden Anregungsvorgang mit der erforderlichen Anregungsenergie ε . Es lassen sich daher mittels des gemessenen Wertes für τ und der theoretisch berechenbaren Werte für die mittlere Stoßzahl, bzw. für das Verhältnis zwischen Anregung und Dämpfung die wirk samen Stoßzahlen für beide Vorgänge bestimmen.

Die ziemlich allgemein bekannten Ergebnisse der Schalldispersionsversuche besagen, daß nach einer Gleichgewichtsstörung die Anpassungsgeschwindigkeiten der verschiedenen molekularen Energien an einen neuen Gleichgewichtszustand grundsätzlich mit steigender Höhe der anzuregenden Energiequanten $\varepsilon = h\nu$ abnehmen, also in der Reihenfolge: Rotation, Schwingung, Dissoziation, Term anregung, Ionisation, — wobei die wirksamen Stoßzahlen in reinen Gasen meist um Größenordnungen höher sind als in Gasmischungen, unter sonst gleichen Bedingungen. Es besteht eine mäßige Temperaturabhängigkeit der wirksamen Stoßzahlen in nicht eindeutiger Richtung.

Allen Versuchen ist gemeinsam, daß die Energieänderung, die das Gleichgewicht stört, innerhalb des Translationsfreiheitsgrades auftritt, — was auf chemische Reaktionen nicht unbedingt zutreffen muß. Ferner gestattet die Methode grundsätzlich nur, ein integrales Defizit in der spezifischen Wärme zu ermitteln. Bei gleichzeitigem Vorhandensein verschiedener ähnlicher Einstellzeiten für verschiedene innere Freiheitsgrade wird die Ermittlung und Zuordnung dieser Werte aus einer einzigen gemessenen mittleren Einstellzeit mitunter etwas fragwürdig. Dabei spricht die Methode auch nicht ohneweiters an auf einen theoretisch nicht ausgeschlossenen Fall, daß beispielsweise innere Freiheitsgrade mit relativ geringeren Einstellzeiten sich vor Erreichung des *allgemeinen* Gleichgewichtes auf Kosten der noch nicht am Energieaustausch beteiligten, trägeren inneren Freiheiten vorübergehend über das endgültig erreichbare Temperaturniveau hinaus aufheizen, also sozusagen durch die endgültige Gleichgewichtslage hindurchpendeln können.

Erwähnenswert sind daher an dieser Stelle Versuche von SCHÜLER, HABER und GOLLNOW [36 bis 40], die gegen Ende der dreißiger Jahre die Bildung geringer Mengen von Metallhydriden in Edelgasatmosphäre bei Entladungen in gekühlten Hohlkathoden beobachteten. Die Gastemperaturen im Hohlraum lagen bei mehreren hundert Grad Kelvin und beeinflußten die Erscheinungen nicht nachweisbar; die Drucke der Edelgasatmosphäre wurden von einigen 10^{-2} mm Hg auf einige 10^0 mm Hg während der Versuche gesteigert, um den Einfluß einer wachsenden Zahl von Stößen mit reiner Translationsenergie zu zeigen. Durch Messung der Intensitätsverteilung in den Rotationslinien der neugebildeten Moleküle konnten SCHÜLER und seine Mitarbeiter feststellen, daß der Mechanismus bei der Molekülbildung durchaus nicht einheitlich zu sein braucht. Demnach bildet sich CuH beispielsweise im praktisch rotationslosen Zustand, um erst bei zunehmender Stoßzahl im Gas sich allmählich einer Gleich-

Vol
1
195

gewichtsverteilung der Rotation zu nähern. Bei AlH hingegen herrschte von Anbeginn seines Bestehens an Gleichgewichtsverteilung innerhalb des Rotationsfreiheitsgrades, entsprechend einer Temperatur von 1800°K , also einem Mehrfachen der Temperatur im Entladungsraum. Im Verlauf zahlreicher Stöße mit den Edelgasatomen sinkt diese Rotationstemperatur unter Beibehaltung von Gleichgewichtsverteilung auf die Temperatur des Entladungsraumes ab. Leider ist bei dieser Art von Versuchen nicht eindeutig klar, wann es sich bei der Molekülbildung um Oberflächenreaktionen, wann um spezielle Zerstäubungsvorgänge, wann um normale Reaktionen im Gasraum handelt. Auch wurden die Translationstemperaturen der Metallhydride nie gemessen.

Ebenso wie die Versuche der BODENSTEIN-Schule (und die von HABER) fanden die Schalldispersionsmessungen des Kreises um EUCKEN durchwegs bei mäßigen Temperaturen bis zu 700°K aufwärts statt. Sie lagen im Druckbereich zwischen 1 und $0,1\text{ at}$.

In den ersten Jahren des zweiten Weltkrieges beabsichtigte DAMKÖHLER, beide Methoden auch auf Messungen technischer Flammen, also auf rasch ablaufende komplexe Gasreaktionen mit Gleichgewichtstemperaturen zwischen 2000 und 3000°K , auszudehnen [41, 42, 43]. Sein früher Tod hemmte diese Entwicklung zunächst.

Kurz vor Ausbruch des Krieges hatten bereits SÄNGER und seine Mitarbeiter die grundsätzlichen Ergebnisse der EUCKENSchen Messungen erstmalig innerhalb der Raketentechnik auf Theorie und Versuchsauswertung angewandt [44 bis 67].

3. Messung der individuellen Temperaturen einzelner Freiheitsgrade in der Reaktionszone vorgemischter Flammen

Einen wesentlichen Fortschritt auf dem Wege zur praktischen Isolierung der Initialvorgänge bei der Verbrennung erzielte unterdessen WOLFHARD, als ihm 1943 die Herstellung stationärer, vorgemischter Flammen im Bereich niedriger Drucke bis zu etwa 1 mm Hg abwärts gelang [71]. Durch entsprechende Vergrößerung seiner Brenner-Düsenschnitte bei leicht zunehmendem Gasdurchsatz konnte er den Gasdruck immer mehr absenken, ohne daß die Flamme ins Brennerrohr zurückslag, wobei die untere Druckgrenze lediglich durch die Saugleistung der den geschlossenen Raum um den Brenner entleerenden Pumpen bestimmt war. WOLFHARD benutzte für seine Versuche einen Bereich geringer Strömungsgeschwindigkeit wenig oberhalb der unteren Stabilitätsgrenze der Flamme, wo bei laminaren Strömungsverhältnissen der äußere Flammenkegel sich bereits von der Flammenbasis getrennt hatte, während der innere, die eigentliche Reaktionszone enthaltende Kegel — zu einer flachen Scheibe zusammengedrückt — der Düsenaustrittsöffnung auflag. So sind die einzelnen Bereiche der Reaktionszone optischen Messungen ohne gegenseitige Überdeckung zugänglich. Außerdem nimmt die Dicke der Reaktionszone mit fallenden Drucken erheblich zu, beispielsweise von 0,03 mm bei 1 at auf 1 cm bei 2 mm Hg. Endlich können auch die — ursprüngliche Leuchterscheinungen verfälschenden — Stoßdämpfungseffekte vermieden werden, da bei Drucken von etwa 10 mm Hg im Feuergas die mittlere Zeit zwischen zwei gaskinetischen Stößen eines Moleküls, die dem Druck umgekehrt verhältnig ist, bereits in die Größenordnung der mittleren natürlichen Lebensdauer angeregter Zustände kommt. Bedenkt man noch, daß bei technischen Großflammen die Strömung in den kleinen Reaktionszentren innerhalb der Strömungswirbel wohl als quasilaminar angesehen werden kann, so spiegelt die WOLFHARDSche Versuchsanordnung ein ziemlich naturgetreues Bild eines Kleinraumes um irgendein Reaktionszentrum im Feuergas

wider, wobei der geringe Druck sich als räumliche und zeitliche Auseinanderzerrung der Vorgänge, also wie Mikroskop und Zeitlupe, auswirkt.

Mit dieser Anordnung war es nun erstmalig möglich, die Flammenspektroskopie, die bis dahin in der Reaktionskinetik mehr oder minder nur zum Nachweis instabiler Zwischenprodukte gedient hatte, unmittelbar zur Messung von Energieverteilung im Reaktionszentrum der Flamme zu benutzen. Meist in Zusammenarbeit mit GAYDON maß WOLFHARD in den Nachkriegsjahren nach bekannten Verfahren [36 bis 40; 67 bis 70] die den einzelnen Freiheitsgraden der Moleküle im Reaktionsbereich zugeordneten Temperaturen:

Die *Termtemperatur* aus dem Helligkeitsvergleich einer zu einem bestimmten Elektronenübergang gehörenden Spektrallinie gegenüber der gleichen Linie eines schwarzen Strahlers bekannter Gleichgewichtstemperatur;

die *Schwingungstemperatur* aus der Intensitätsverteilung der Linien mit gleicher Rotationsquantenzahl in den Banden eines Bandensystems;

die *Rotationstemperatur* aus der Intensitätsverteilung der Rotationslinien innerhalb einer Bande, und endlich

die *Translationstemperatur* aus der Linienverbreiterung aller Spektrallinien infolge des durch die thermische Schwirrbewegung der Moleküle verursachten DOPPLER-Effektes [72 bis 84].

Temperaturbestimmungen dieser Art aus Messungen des *Dissoziations-* oder *Ionisationsgrades* wurden bisher nicht vorgenommen.

Alle diese Methoden setzen allerdings voraus, daß *innerhalb* des jeweils betrachteten Freiheitsgrades eine Energieverteilung gemäß dem BOLTZMANNSchen Wahrscheinlichkeitsansatz für Gleichgewichtszustände herrscht. Andernfalls verliert selbst der Begriff der Temperatur seinen Sinn.

Die wesentlichen Ergebnisse der WOLFARDSchen Messungen an vormischten Flammen, die besonders an Acetylenbrand in Sauerstoff oder Luft sehr systematisch durchgeführt wurden, sind folgende:

1. Die Translationstemperaturen liegen eindeutig bis zu 80% über der berechneten allgemeinen Gleichgewichtstemperatur der Flamme und scheinen in den von Stoßdämpfung freien, niedrigen Druckbereichen ziemlich unabhängig vom Feuergasdruck zu sein. Sie scheinen auch unabhängig von der Frequenz der Meßlinie, nicht aber vom untersuchten Bereich der Reaktionszone zu sein. Es herrscht MAXWELL-Verteilung der Energien innerhalb des Translationsfreiheitsgrades.

2. Die Rotationstemperaturen sind für verschiedenartige Trägerteilchen in derselben Flamme verschieden hoch, nehmen mit fallendem Gasdruck zu und in der Regel mit fallender Meßlinien-Frequenz ab. Sie liegen in den meisten Fällen eindeutig über der theoretischen Gleichgewichtstemperatur der Flamme, von wenigen Prozenten an bis zu mehr als 300% dieses Wertes aufwärts. Sie sind schwach abhängig vom untersuchten Bereich der Reaktionszone, im gleichen Sinn wie die Höhe der Translationstemperaturen. Es herrscht nicht in allen untersuchten Fällen Energie-Gleichgewichtsverteilung innerhalb des Rotationsfreiheitsgrades.

3. Die Schwingungstemperaturen wurden nur durch wenige und nicht sehr systematische Messungen erfaßt, die innerhalb der eigentlichen Reaktionszone auf ein Abweichen der Schwingungsenergie vom allgemeinen Gleichgewichtszustand in allerdings nicht eindeutig positiver Richtung hinweisen.

4. Hinsichtlich der Termtemperaturen sind die an *Resonanzlinien* und die an *Nichtresonanzlinien* erhaltenen Meßergebnisse voneinander zu unterscheiden, ebenso wie die Anregungsintensitäten von *flammeneigenen Linien* und von der Flamme *zugemischten neutralen Fremdstoffen*. Bei den *Fremdstoffen* entsprechen

die Intensitäten der im Wellenbereich zwischen 2500 und 3900 AE gemessenen Resonanzlinien Termtemperaturen eines schwarzen Strahlers, die nicht für alle Frequenzen gleich hoch sind, sondern mit wachsender Frequenz der Linien ebenfalls anwachsen, jedoch alle 10 bis 15% oberhalb der theoretischen Gleichgewichtstemperatur des Feuergases liegen. Die Elektronenanregungsenergie befindet sich also hier weder im Gleichgewicht mit allen übrigen Freiheitsgraden, noch herrscht Gleichgewichtsverteilung innerhalb des eigenen Freiheitsgrades. Aus den frequenzabhängigen Temperaturwerten und den zugehörigen Termenergien zweier beliebiger Resonanzlinien ein und desselben Elementes lassen sich jedoch durch Differenzenbildung $\Delta \epsilon / \Delta (\epsilon/T)$ für alle Elektronenübergänge des Wellenlängenbereiches, der durch die oberen Niveaus der Resonanzlinien eingegrenzt ist, einheitliche frequenzunabhängige Temperaturen errechnen, die nur von Element zu Element verschieden sind und bis zu mehr als 300% über dem allgemeinen Gleichgewicht liegen. Im Zuge der Frequenzabhängigkeit scheinen sich einige unterhalb von 2500 AE in Resonanz strahlende Fremdgase gemäß ihren Linienintensitäten gleichzeitig der MAXWELL-Verteilung innerhalb des Termfreiheitsgrades wie auch der außerhalb des inneren Flammenkegels herrschenden allgemeinen Gleichgewichtstemperatur zu nähern; doch sind die entsprechenden Meßpunkte entweder unsicher, oder die strahlenden Fremdgase besitzen keine weiteren Meßpunkte im höherfrequenten Bereich, so daß der Ort ihres Strahlungursprungs unsicher ist.

Alle oberhalb von 2500 AE strahlenden und Fremdstoffen angehörenden Nichtresonanzlinien, — die also von Elektronenübergängen zwischen zwei so hohen Energieniveaus herrühren, daß sie unbeeinflußt von Absorptionsvorgängen die Gasoberfläche erreichen, — überstrahlen noch die höchsten, 3800 °K entsprechenden Helligkeiten der schwarzen Vergleichslichtquelle. Dies gilt auch für alle, dem Flammengas zugehörigen und beobachteten CH- und C₂-Banden im gleichen Frequenzbereich.

Alle diese Ergebnisse lassen nun eindeutig den Schluß zu, daß die spektroskopisch erfaßten Volumausschnitte der Reaktionszone noch zu groß sind, um homogene Struktur aufzuweisen und um ein Überdecken der wirklichen Initialvorgänge im Mikrobereich rings um einen Reaktionsstoß — durch sekundäre Prozesse aus Nachbarbereichen anderer Entwicklungsstufen — zu verhindern. Man mißt daher in Wirklichkeit als Temperaturen integrale Werte über alle Bereiche zwischen den ursprünglichen, streng örtlich begrenzten sowie nicht gleichzeitigen Gleichgewichtsstörungen beim Entladen des chemischen Potentials und der schließlichen allgemeinen Anpassung an ein neues, einheitliches Niveau. Die Auslegung dieser integralen Temperaturwerte wird noch dadurch kompliziert, daß es verschiedenartige Initialvorgänge sind, die gleichzeitig in verschiedenen Entwicklungsstufen in Erscheinung treten. So dürften beispielsweise die Swanbanden des Kohlenstoffs in der Reaktionszone der Acetylen-Sauerstoff-Flamme ihre Energie einer ganz anderen Teilreaktion verdanken als etwa die CH-Banden bei 3143 AE.

Es seien an dieser Stelle noch kurz die angegebenen Meßverfahren für die Temperaturen der einzelnen Freiheitsgrade kritisch betrachtet für solche Fälle, wo die Temperaturen aller Freiheitsgrade im untersuchten Gasvolumen örtlich stark variieren, — unter der stillschweigenden Voraussetzung immer, daß die Abweichungen von einer statistischen Gleichgewichtsverteilung innerhalb der einzelnen Freiheitsgrade den Begriff einer Temperatur — zumindest im Bereich kleinster Räume — noch zulassen.

Intensitätsmessungen an Resonanzlinien geben bei einem Gaskörper mit stark inhomogener Termtemperaturverteilung ein falsches Bild, weil nur die

strengen Resonanzlinien, die Übergänge zwischen dem nichtangeregten Grundzustand und dem nächsthöheren Energieniveau zugeordnet sind, hinsichtlich ihrer Frequenz ungeändert aus dem Gasinnern an die Oberfläche durchdringen, während alle andern, höherfrequenten Resonanzlinien — entsprechend den statistischen Gewichten der verschiedenen möglichen Elektronensprünge — bei jeder Wiederemission in mehrere Linien niedrigerer Frequenzen aufgespalten werden. Sie ergeben so — an der Gasoberfläche angelangt — ein Spektrum mit nach langen Wellen hin verschobenem Intensitätsmaximum und mit relativen Intensitäten, die der allgemeinen Gleichgewichtsverteilung bereits stärker angeähnert sind als die ursprüngliche Strahlung irgendwo im Gasinnern. Daher werden die Resonanzlinien bei Benutzung der Linienumkehrmethode Temperaturen zwischen denen des endgültigen Gleichgewichtszustandes und der sehr hohen ursprünglichen Strahlungstemperatur aus einzelnen Zentren im Gasinnern vortäuschen. Das Bild wird noch komplizierter dadurch, daß in sehr heißen Gasbereichen auch solche Linien, die nicht vom Grundzustand ausgehen, Resonanz geben können entsprechend den Temperaturen der absorbierenden Schichten, und daß andererseits bei der Aufspaltung einer Resonanzlinie entstandene Elektronenübergänge in später durchstrahlten Gasschichten keine Resonanz mehr finden können. Bei den an der Oberfläche austretenden, sehr intensiven *Nichtresonanzlinien* kann man daher auch nur vermuten, daß sie unmittelbar aus den eigentlichen Reaktionszentren im Innern stammen. Ihre Messung mittels der Linienumkehrmethode ist außerdem fragwürdig, solange nicht feststeht, ob man die Ausdehnung dieser Reaktionszentren noch als unendlich dick im optischen Sinne ansprechen darf. Ein Irrtum ist jedenfalls nur immer in dem Sinn möglich, daß den ursprünglichen Strahlungszentren im Innern der Reaktionszone eine zu niedrige Termtemperatur zugeordnet wird. Auch können in die Reaktionszone hereingebrachte, neutrale Fremdgase nur höchstens gleich hohe Energien wieder ausstrahlen, wie ihnen von den ursprünglichen Energieträgern mitgeteilt wurden. Der von WOLFHARD und GAYDON gefundene Gang der Termtemperatur mit der Meßlinienfrequenz bei Resonanzlinien ließe sich im Rahmen der vorstehenden Überlegungen so deuten, daß die kurzwelligeren Spektrallinien zu einem größeren Prozentsatz aus Gasbereichen höherer mittlerer Termenergie stammen als die nach den kälteren Absorptions- und Emissionsbereichen hin stärker begünstigten langwelligeren Linien. Daß die Rotationstemperaturen einen ähnlichen Gang wie die Termtemperaturen aufweisen, deutet auf eine nur geringfügige Phasenverschiebung in der Energieauffüllung dieser beiden Freiheitsgrade. Darüber hinaus lassen sich aus dieser Erscheinung keinerlei Aussagen ableiten, weder über die Reihenfolge der Energieaufteilung auf diese beiden Freiheitsgrade noch darüber, aus welchen Freiheitsgraden die hohen Rotations- und Termtemperaturen bei den Molekülbegegnungen gespeist worden sind. Die Frequenzunabhängigkeit der Translationstemperaturen bedeutet nichts in diesem Zusammenhang. Sie erklärt sich aus der für sie zuständigen speziellen Meßmethode, die nicht Intensitäten bestimmter Elektronenübergänge, sondern eine relative Linienverbreiterung $\Delta \lambda/\lambda$ erfaßt, die bei gleicher Translationstemperatur und gleicher Gaszusammensetzung für alle Linien des Spektrums gleich groß sein sollte. Die Methode ist nur empfindlich gegen Fälschungen bei vorhandener Stoßdämpfung und in Anwesenheit molekularer elektrischer oder magnetischer Felder. Ist das strahlende Gasvolum nicht völlig homogen hinsichtlich seiner Translationsenergie, so entspricht die Linienverbreiterung den heißesten Bezirken der durchstrahlten Schicht, — solange diese Bezirke noch groß genug sind, um einen wahrnehmbaren Helligkeitsbeitrag zu leisten; — das Intensitätsprofil der Linie hängt jedoch stark vom Temperaturverlauf längs des

Strahlungsweges ab. Wo es möglich ist, als Linienbreite den Bereich mit einem definierten Helligkeitsüberschuß über einen gleichmäßig dunklen Untergrund auszumessen, kann man bei Kenntnis der Empfindlichkeitsschwelle des gesamten Aufnahmesystems daher immerhin sagen: „ $P\%$ des beobachteten Gasvolumens strahlen entsprechend einer Translationstemperatur von $T^{\circ}\text{K}$, höhere Temperaturen können nur von noch geringeren Volumbruchteilen erreicht werden.“ — Mißt man hingegen als Linienbreite ein definiertes, auf das Intensitätsmaximum bezogenes Helligkeitsgefälle, so erhält man in Abwesenheit von Linienumkehr-effekten jedenfalls zu geringe Werte für die Verbreiterung. Das Gefälle ist nämlich steiler als bei einem Gas einheitlicher Temperatur, da die Linienmitte von der Ausstrahlung aller strahlungsfähigen Moleküle längs des Strahlungsweges her-röhrt, die Randbezirke jedoch nur von den geringen Schichtdicken mit den hohen Temperaturen. Bei Linienumkehr wird selbst die Festlegung des Bezugs-maximums unsicher.

Im Bestreben, die Temperaturmessungen in der Reaktionszone von Nieder-druckflammen im Rahmen einer historischen Entwicklung auf ein bestimmtes, vorhin umrisenes Ziel hin einzuordnen, möchte man abschließend bemerken, daß diese Methode zwar eine Menge neuer Erkenntnisse hinsichtlich des Reak-tions-mechanismus in der Kette und eine Bestätigung der extremen Nichtgleich-gewichtsverhältnisse in der makroskopischen Reaktionszone bisher brachte, die Frage der Energieaufteilung unmittelbar nach der Primärreaktion jedoch grund-sätzlich nicht lösen können dürfte.

Bei gaskinetischen Messungen in extremen Nichtgleichgewichtsbereichen sollte der Temperaturbegriff überhaupt verlassen werden, und statt dessen *un-mittelbar* Energien, Impulse, Geschwindigkeiten, Massen, Quanten und Be-wegungsrichtungen gemessen werden, wenn man Aufschluß über die tatsäch-lichen Energietransformationen und ihre Reihenfolge im Anschluß an eine chemische Reaktion erhalten will. Ich möchte darum zum Abschluß dieser Aus-führungen einen Gedanken erläutern, der zwar bereits im Jahre 1938 entstand, im Jahr 1949 in Frankreich erstmalig veröffentlicht [85] wurde, jedoch bei den etwas turbulenten Arbeitsbedingungen der Kriegs- und Nachkriegsjahre bisher nicht praktisch verfolgt werden konnte: die Benutzung von Molekularstrahlen zur Erforschung der Reaktionskinetik.

III. Vorschlag zur Anwendung der Molekularstrahlmethode auf die Messung der Energietransformationen bei Reaktionsstößen

Die Anwendung von Molekularstrahlversuchskammern zur Untersuchung der stationären Eigenschaften einfacher Gase [123 bis 133] (wie Geschwindigkeits-verteilung der Moleküle, Wirkungsquerschnitte, freie Weglängen, magnetische Momente von Atomhülle und Kern, Dipolmoment der Moleküle, Isotopenbestand, Dissoziationsgrad, usw.) oder von Vorgängen an Grenzflächen [134 bis 136] (wie Reflexionsgesetze für Gase, Verweilzeiten, Energieaustausch, Beugungs-spektren, usw.) ist seit langem bekannt. Die Methode wurde von DUNOYER [86] im Jahre 1911 erstmalig angewendet und ab 1920 vor allem von STERN und seinen Mitarbeitern [87, 88] entwickelt. In Frankreich dehnte PLANIOL die Methode auch bereits auf einen Reaktionsvorgang, nämlich die Erzeugung und Untersuchung von Ionen aus [89, 90], indem er in der Versuchskammer einen neutralen Molekular- und einen Elektronenstrahl miteinander kreuzte, senkrecht zur Ebene der gekreuzten Strahlen die an der Kreuzung gebildeten Ionen herau-zog und die sekundliche Ionenproduktion bestimmte.

In neuester Zeit [91, 92, 93] benutzten JAECKEL und JAWTUSCH die Methode

der gekreuzten Molekularstrahlen erfolgreich zur Ermittlung der Stoßquerschnitte bei elastischer Streuung.

Es wird nun vorgeschlagen, auch gewöhnliche Molekularreaktionen in analoger Weise zu untersuchen, indem man beispielsweise zwei Strahlen von zu einer Austauschreaktion fähigen Molekülen, wie z. B. C₂ und OH, miteinander kreuzt. Beide Strahlen sollen hinsichtlich ihrer Partikelgeschwindigkeiten und -massen nach Möglichkeit homogenisiert sein; ebenso soll der Schnittwinkel beider Strahlen definiert und justierbar sein. Aus den hinter der Kreuzungsstelle gemessenen Änderungen von Richtungen, Geschwindigkeiten, Massen und etwaigen Anregungszuständen sollen Schlüsse auf den Mechanismus der Stoßreaktion gezogen werden. Die Methode kann, wenn sich die Nachweismethoden genügend empfindlich gestalten lassen, grundsätzlich auch auf *drei* Strahlen, die im Dreierstoß reagieren, ausgedehnt werden. Der *Fortschritt* der hiermit vorgeschlagenen Methode gegenüber früheren Versuchsanordnungen wird vor allem darin gesehen, daß sie erlaubt, die Stoßbedingungen in sehr engen Grenzen zu fixieren und zu kennen, und ferner die Messung unmittelbar nach dem Reaktionsstoß vorzunehmen, bevor durch weitere Stöße zusätzliche Energieänderungen stattfinden könnten. Ihre größte *Schwierigkeit* bildet das Problem, die zu messenden Vorgänge in genügender Intensität zu erzeugen, um ihren Nachweis zu gestatten. Solange man jedoch keine andere Anordnung kennt, die Entsprechendes leistet, scheinen die außerordentlich hohen Anforderungen an Meßempfindlichkeit, Präzision, Pumpleistung usw., kurz der ganze, der Molekularstrahlversuchsmethode eigene Versuchsaufwand, gerechtfertigt, — dies um so mehr, als die Technik der Herstellung, Monochromatisierung und Registrierung von Molekularstrahlen für andere Zwecke bereits so weitgehend entwickelt wurde [94 bis 99; 122], daß sie in ihrem gegenwärtigen Stand zur Untersuchung von Reaktionsstößen wahrscheinlich bereits ausreichen dürfte. Dies soll im folgenden erläutert werden. Erwähnt werden soll vorher noch, daß die beabsichtigten Messungen von Elementarreaktionen noch keineswegs die Unbestimmtheitsbeziehung verletzen, da beispielsweise nicht Orts- und Impulsbestimmungen einzelner Teilchen vorgenommen werden, sondern statistische Mittelwerte dieser Größen über eine hinreichend hohe Anzahl von Teilchen gemessen werden sollen, wobei nur die Ausgangsbedingungen für alle diese Teilchen künstlich stark eingeengt wurden gegenüber den natürlichen Gegebenheiten, wodurch eine eindeutigere Zuordnung von Ausgangs- und Endzustand möglich wird.

Als Molekularstrahl wird allgemein ein Bündel gasförmiger Teilchen mit dem Teilchendurchmesser σ bezeichnet, deren mittlere freie Weglänge $A = \bar{v}/Z = = k T/(\pi \sqrt{2} \cdot p \cdot \sigma^2)$ groß ist gegenüber dem Bündeldurchmesser d , in dem also die Wahrscheinlichkeit gegenseitiger Zusammenstöße vernachlässigbar gering ist. Der Bündeldurchmesser lag bei den bekannten Molekularstrahlversuchen in der Größenordnung von 10° bis 10⁻³ mm.

Die Versuchsanlage beim Molekularstrahlverfahren besteht grundsätzlich aus:

1. Der *Erzeugungskammer*, dem sogenannten „Ofen“, in dem die zu untersuchende Gasart bei einem definierten niedrigen Druck und einer definierten Temperatur hergestellt oder vorrätig gehalten wird;
2. dem *Ofenspalt*, durch den eine bekannte Anzahl von Molekülen in der Zeiteinheit ausströmt, die durch Ofendruck, -temperatur, Gasart und Spaltgeometrie bestimmt ist. An den Ofenspalt schließt sich
3. die eigentliche *Strahlstrecke* an, mit einem oder mehreren Abbildungs- spalten zur Ausblendung eines definierten Strahlbündels, und mit wahlweise eingeschalteten Sonderapparaturen zur Präparierung des Strahls, je nach dem

beabsichtigten Untersuchungszweck. Am Ende der Strahlstrecke befindet sich

4. der *Empfängerspalt*. Er muß mittels einer Mikrometerschraube quer zur Strahlrichtung verschiebbar sein, und dient dazu, den Strahl aufzunehmen und ihn

5. der *Detektorkammer* zuzuführen, in der etwaige Änderungen der Strahl-eigenschaften gemessen werden.

Die Strahlstrecke und in der Regel auch die Detektorzelle müssen ständig unter Höchstvakuum, in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-7} mm Hg, stehen. Die Länge der Strahlstrecke bewegte sich bei den bisher bekannt gewordenen Versuchen zwischen wenigen Zentimetern und fast zwei Metern. Sie ist vor allem durch die Pumpleistung nach oben zu begrenzt. Aus diesem Grund sind längere Strahlstrecken mitunter auch in mehrere Sektoren unterteilt, die durch zusätzliche Spalte verbunden und getrennt evakuiert werden. Auf diese Art wird gleichzeitig auf Kosten der Strahlintensität eine zu starke Verbreiterung des Bündels verhindert. Die Spaltbreiten, die den Bündelquerschnitt bestimmen, sind nach unten zu theoretisch durch die Größenordnung der Materiewellenlänge, praktisch jedoch weit eher infolge mechanischer Herstellungsschwierigkeiten auf 10^{-2} bis 10^{-3} mm begrenzt. Dadurch ist gleichzeitig auch der Ofendruck p in der Erzeugungskammer nach oben hin begrenzt, da die diesem Druck entsprechende freie Weglänge mindestens in der Größenordnung des Spalts sein muß. Bei einer Ofenspaltbreite von $d_0 = 5 \mu$ beispielsweise, was etwa der unteren Grenze der bisher benutzten Spaltbreiten entspricht, wäre die obere Grenze des Ofendrucks vorgeschrieben durch

$$p_{[\text{kg/m}^2]} \leq \frac{k T}{\pi \sqrt{2} \sigma^2 d_0} = 5,67 \left(\frac{\sigma_H}{\sigma} \right)^2 \cdot T;$$

das heißt bei Wasserstoffmolekülen und 400° K müßte der Ofendruck gut unterhalb von 30 mm Hg bleiben, bei 1000° K unterhalb von 80 mm Hg, usw.

Infolge all dieser Zusammenhänge dürfte sich die Zahl $N = p f_0 / \sqrt{2 \pi m k T}$ der aus einem rechteckigen ($f_0 = d_0 \cdot h_0$) Ofenspalt strömenden Moleküle nicht wesentlich über

$$N \leq \frac{\sqrt{k/m_{M=1}}}{2 \pi^{3/2} \sigma_H^2} \cdot \left(\frac{\sigma_H}{\sigma} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{T}{M}} \cdot h_0 = 7,3 \cdot 10^{14} \cdot \left(\frac{\sigma_H}{\sigma} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{T}{M}} \cdot h_0 [\mu]$$

Teilchen¹ pro Sekunde erhöhen lassen. Bei einer Spalthöhe $h_0 = 2 \text{ mm}$ und für zweiatomigen Wasserstoff ($M = 2,0156$; $\sigma = 2,22 \text{ AE}$) mit $T = 1000^\circ \text{ K}$ hieße das beispielsweise: $N \leq 6,5 \cdot 10^{18} \text{ sec}^{-1}$. Für Kohlenmonoxyd bei gleicher Temperatur und gleichen Spaltdimensionen würde dieser Wert auf etwa den sechsten Teil zurückgehen. Auch für mittelschwere Teilchen dürften sich ursprüngliche Strahlintensitäten in der Größenordnung von 10^{16} bis 10^{18} Teilchen pro Sekunde im Strahlquerschnitt bei geeigneten Spaltdimensionen durchaus noch realisieren lassen, wie an Hand einer späteren Zahlentafel nachgeprüft werden kann.

Außer den geschilderten ständigen Bestandteilen der Molekularstrahlkammer kennt man auf der Strahlstrecke noch von Fall zu Fall wechselnde Apparaturen, beispielsweise zum Homogenisieren der Geschwindigkeiten oder der Massen des Molekularstrahls, zur nachträglichen Beschleunigung seiner Teilchen, zum Gleichrichten von Spins oder Dipolen, zum Ionisieren oder zur Anregung bestimmter Energietufen der Moleküle durch Bestrahlung usw. Nicht zuletzt kann die Strahlstrecke einen Reaktionsraum im engeren Wortsinn enthalten, wie z. B. im Vorschlagsfall — wo mit *mehreren* Erzeugungskammern und Strahlstrecken gearbeitet werden soll — den *Kreuzungsort der Strahlen*.

¹ $\sigma_H = 1,057 \text{ AE}$, Durchmesser der Grundbahn des BOHRschen *H*-Modells als Bezugssstrecke; $m_{M=1}$, Masse eines Atoms vom Molekulargewicht $M = 1$.

Über die verschiedenen Methoden bei der Strahlpräparierung gibt es zahlreiche Literatur. Die *Gleichrichtung* der aus dem Ofenspalt in alle Richtungen des räumlichen Winkels π geradlinig fliegenden Moleküle geschieht, wie bereits erwähnt, durch Abbildungsspalte, die unerwünschte Richtungen nicht durchlassen. FRIEDBURG und PAUL [107] berichteten darüber hinaus vor kurzem über ein Verfahren, divergent aus dem Ofenspalt austretende Atome durch ein inhomogenes rotationssymmetrisches Magnetfeld zu fokussieren. VAUTHIER [150] schlug bereits vorher zum gleichen Zweck die Anwendung eines elektrischen Sektorfeldes vor. Beide Prinzipien lassen sich natürlich auch zur bloßen Gleichrichtung des Atomstrahls ausnützen.

Die *Monochromatisierung der Translationsgeschwindigkeiten* im gleichgerichteten Strahl wurde bei *neutralen* Molekülen bisher auf zwei verschiedenen Wegen [100 bis 106] erreicht: einmal durch Beugung des Strahls an einer Kristallspaltfläche und Ausblendung der erwünschten DE BROGLIE-Wellenlänge $\lambda = h/m v$, also einer ganz bestimmten Reflexionsrichtung, aus dem Beugungsspektrum; zum andern auf klassisch mechanischem Weg, indem man den Molekularstrahl durch die Zahnräder zweier, auf gleicher Achse rasch rotierender Scheiben (nach dem Prinzip von FIZEAUS Versuch zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit) schickte. Die zuerst genannte Methode ist wegen $\lambda = h/m v$ nur bei Molekularstrahlen mit einheitlicher Teilchenmasse erfolgreich. Mittels der zweiten Methode gelang es bereits, Strahlen praktisch einheitlicher Geschwindigkeit, das heißt mit bis zu 1% Geschwindigkeitsstreuung herzustellen. — Versuche von ESTERMANN, STERN und Mitarbeitern [108] haben gezeigt, daß bei horizontal gerichteten Molekularstrahlen beliebiger Massenzusammensetzung auch die dem Geschwindigkeitsquadrat verkehrt verhältnige Ablenkung $\Delta = g \cdot l^2/2 v^2$ durch die Schwerkraft bei hinreichend langen Strahlwegen l als Geschwindigkeitsanalysator gelten kann. — Bei *Molekülen mit magnetischen oder elektrischen Momenten* läßt sich die Geschwindigkeit einfach durch Anlegen von inhomogenen magnetischen oder elektrischen Querfeldern, die den Strahl entsprechend seinen verschiedenen Translationsenergien aufspalten oder verbreitern, und durch anschließende Abblendung der unerwünschten Richtungen homogenisieren [109 bis 122]. Inhomogene Magnetfelder sind mit Gefällen bis zu 10^5 Gauß/cm aufwärts herstellbar, inhomogene elektrische Felder bis über 10^7 Volt/cm hinaus. — *Ionen* konstanter Masse lassen sich bereits in *homogenen* elektrischen oder magnetischen Querfeldern zu einheitlicher Geschwindigkeit aussieben. In Fällen nicht neutraler Strahlpartikel ist überdies noch deren gleichmäßige Beschleunigung auf sehr hohe Geschwindigkeiten durch Anlegen von Längsfeldern mit bestimmtem Spannungsgefälle möglich.

Die *Monochromatisierung der Massen* im Molekularstrahl wird mit Verfahren erreicht, die denen der Geschwindigkeitshomogenisierung weitgehend ähnlich sind, und die zur Bestimmung von Dissoziationsgraden oder Isotopen im Strahl auch bereits angewandt wurden [131]. Bei Strahlen einheitlicher Geschwindigkeit kann wieder die Beugung am Kristallspalt mit nachfolgender Ausblendung der gewünschten Materiewellenlänge zur Aussiebung einer homogenen Teilchenmasse dienen. Bei nichtneutralen Strahlpartikeln können auch mit Hilfe kombinierter elektrischer und magnetischer Felder nach Art des ASTONSchen Massenspektrographen Teilchen einheitlicher Masse bei verschiedener Translationsgeschwindigkeit ausgeblendet werden in Ausnutzung der Tatsache, daß die elektrische Feldstärke der Energie geladener Teilchen, die magnetische Feldstärke dem Impuls dieser Teilchen umgekehrt verhältnig ist. Mittels der letztgenannten Methode versuchten FONER und HUDSON [139] unlängst, Atome und freie Radikale in Kohlenwasserstoff-Sauerstoff-Flammen zu bestimmen. Sie benutzten dabei ein inter-

essantes Kombinationsverfahren: In der Erzeugungskammer brannte die zu untersuchende Flamme bei Drucken von größtenteils 10^2 mm Hg. Der aus dem Ofen austretende Feuergasstrahl molekularer Dimensionen wurde durch einen koaxial entgegengerichteten Elektronenstrahl ionisiert und danach im Massenspektrographen zerlegt. Grundsätzlich könnte man natürlich ähnlich vorgehen, die künstlich ionisierten Moleküle durch entsprechende Felder und Blenden hinsichtlich Massen und Geschwindigkeiten aussieben und versuchen, die monochromatisierten Teilchen wieder zu neutralisieren [137; 138]; doch sind die hierfür bekannten Verfahren nicht sehr elegant und die Intensitätsverluste bedeutend.

Alle diese Verfahren, um Richtungen, Geschwindigkeiten und Massen der Strahlpartikelchen zu homogenisieren, gehen nämlich auf Kosten der Strahlintensität. Von den $N = \frac{p \cdot f_0}{\sqrt{2\pi m k T}}$ sekundlich den Ofenspalt verlassenden

Molekülen treten nur jeweils $dN_i = \frac{p \cdot f_0}{\sqrt{\pi k T}} \frac{p_i}{p} \left(\frac{v}{w_i}\right)^3 \cdot e^{-\left(\frac{v}{w_i}\right)^2} dv$ Teilchen mit einem bestimmten Molekulgewicht m_i und einer bestimmten absoluten Translationsgeschwindigkeit v aus, wenn p_i/p der Partialdruck dieser Teilchen im Ofen, $w = \sqrt{2kT/m}$ ihre wahrscheinliche Translationsgeschwindigkeit und $m = \frac{1}{\left(\sum_i \frac{p_i}{p}\right)^2}$ ein ge-

mitteltes Molekulgewicht darstellen. Sieht man also ab von Verlusten, die durch apparative Unzulänglichkeiten bedingt sind, und setzt außerdem Gleichgewichtsverhältnisse im Ofen voraus, so beträgt z. B. bei der Geschwindigkeitshomogenisierung im bereits gleichgerichteten Strahl das Verhältnis der sekundlichen Teilchenzahl des gesiebten Strahles zur ursprünglichen Teilchenzahl eines hinsichtlich seiner Massen homogenen Gases: $dN/N = 2(v/w)^4 e^{-(v/w)^2} dv/v$. Für den Fall, daß man die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2}w = 2 \cdot \sqrt{kT/m}$ mit einer erlaubten Geschwindigkeitsstreuung von $dv/v = 1\%$ aus dem Strahl ausblendet, erhält man einen möglichst günstigen Bruchteil: $8 \cdot e^{-2} \cdot dv/v = 1,083 \cdot 10^{-2}$.

Vernachlässigt man bei der Massenmonochromatisierung etwaige Isotopen und beschränkt sich auf die Trennung von Atomen und Molekülen im Strahl einheitlicher Geschwindigkeit, so entspricht der auf irgendeine Teilchensorte i entfallende Prozentsatz dem Partialdruckverhältnis dieser Teilchen im Ofen, p_i/p ; also beispielsweise für Atome eines nach dem Schema $A B \rightarrow A + B$ dissoziierenden Gases: $p_i/p = k_p/p [\sqrt{p/k_p + 1} - 1]$, bzw. für Atome eines in gleichartige Bestandteile zerfallenden zweiatomigen Gases: $p_i/p = k_p/p [\sqrt{p/k_p + 1/4} - 1/2]$, wenn k_p die temperaturabhängige Gleichgewichtskonstante für den Dissoziationsvorgang ist.

Der Intensitätsrest, der dem mit einer sekundlichen Teilchenzahl N unter dem räumlichen Winkel $2\psi = \pi$ aus einem verschwindend kleinen Ofenspalt strömenden Strahl bei seiner Gleichrichtung bis auf einen Betrag $\pm d\omega = \pm 2d\psi$ durch einen kreisrunden, koaxialen Abbildungsspalt verbleibt, beträgt

$$\frac{\int_{\psi=0}^{d\psi} \sin \psi \cos \psi d\psi}{\int_{\psi=0}^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi d\psi} = \sin^2 d\psi = \frac{f_A/\pi r^2}{f_A/\pi r^2 + 1} \approx f_A/\pi r^2,$$

worin f_A die Fläche des Abbildungsspaltes und r den Abstand zwischen diesem

und dem Ofenspalt bezeichnen. Bei endlich großer Ofenspaltfläche f_0 , unter sonst gleichen geometrischen Verhältnissen, wächst der halbe Strahlöffnungswinkel ψ auf den Wert $d\omega = \arctg [(\sqrt{f_A} + \sqrt{f_0})/\sqrt{\pi r}]$ an. Wenn Ofen- und Abbildungsspalt kreisrund und gleich groß sind, so ist $d\omega = \arctg \frac{2\sqrt{f_0}}{\sqrt{\pi r}}$ der mittlere

halbe Öffnungswinkel des Strahls. Die relative restliche Intensität innerhalb dieses Kegels läßt sich im letzten Falle sehr grob zu $f_0/\pi r^2$ abschätzen, bei rechteckiger Spaltöffnung zu $h_0 d_0/(\pi r^2)$. — Die Gleichrichtung eines Molekularstrahls durch ein rotationssymmetrisches Magnetfeld wird mit geringeren Intensitätsverlusten verbunden sein, setzt aber magnetische Momente bei den Molekülen voraus.

Ein Molekularstrahl aus Partikeln mit einheitlicher Masse m_i und Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot w \pm dv}$, deren Bewegungsrichtungen durch den räumlichen Öffnungswinkel $2 \cdot d\omega$ des Strahlbündels begrenzt sind, fördert sekundlich höchstens $dN_i \sin^2 \psi$ Teilchen durch den Strahlquerschnitt. Es ist

$$dN_i \sin^2 \psi = \\ = \frac{4 \sqrt{k/m_{M=1}}}{\sigma_H^2 \cdot \pi^{5/2} \cdot e^2} \cdot \frac{\frac{p_i}{\rho} \sqrt{T} \cdot \frac{dv}{v}}{\sqrt{M_i} \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_H} \right)^2} \cdot \frac{d_0 h_0^2}{r^2} = 2,525 \cdot 10^{20} \cdot \frac{\frac{p_i}{\rho} \sqrt{T} \cdot \frac{dv}{v}}{\sqrt{M_i} \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_H} \right)^2} \cdot \frac{d_0 h_0^2}{r^2} [\text{s}^{-1}]$$

Ein solcher Strahl enthält

$$n = \frac{dN_i \sin^2 \psi}{f \cdot v} = \frac{p_i}{\rho} \cdot \frac{p \cdot f_0}{k T} \cdot \frac{2 \sqrt{2} \cdot f_A / f \cdot dv / v}{e^2 \cdot \pi^{3/2} \cdot r^2}$$

Teilchen im Einheitsvolumen. Das Verhältnis f/f_A darin ist abhängig von der Entfernung l zwischen den Querschnitten f_A und f . Es beträgt für rechteckige Spalte

$$f/f_A = \frac{[(d_0 + d_A) l + d_A \cdot r] [(h_0 + h_A) l + h_A \cdot r]}{d_A h_A r^2}.$$

Wenn Ofen- und Abbildungsspalt gleich große Dimensionen haben, wird $f/f_A = (2 \cdot l/r + 1)^2$.

Die Dichte homogenisierter Molekularstrahlen im Abstand l vom Abbildungsspalt ist also nach oben zu begrenzt durch

$$n \leq \frac{2 \cdot p_i / \rho \cdot dv / v \cdot h_0 \cdot f_A / f}{e^2 \cdot \pi^{5/2} \cdot \sigma_i^2 \cdot r^2} = 1,385 \cdot 10^{16} \frac{p_i}{\rho} \cdot \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_i} \right)^2 \cdot \frac{h_0}{(2l+r)^2} [\text{m}^{-3}]$$

das heißt beispielsweise für $h_0 = h_A = 2$ mm, $r = 40$ mm, $l = 50$ mm, $(\sigma_H/\sigma_i) = 1$ und $p_i/\rho = 0,67$: $n \leq 10^{15}$.

In jüngster Zeit glauben KANTROWITZ und einige Mitarbeiter [151; 152] allerdings, diese — mittels der klassischen Strahlerzeugungsmethoden erreichbaren — Werte durch einen Kunstgriff noch um ein bis zwei Zehnerpotenzen steigern zu können. Sie bringen den Ofenspalt im Mündungsquerschnitt einer dem Ofen angeschlossenen Miniatur-LAVALdüse an und erreichen hierdurch bei gleichbleibenden Zustandsgrößen (p_0 , T_0) im Ofen und einer Strömungsgeschwindigkeit V im Düsenmündungsquerschnitt:

1. Eine erhöhte sekundliche Fördermenge durch den Ofenspalt. Infolge der vergrößerten mittleren freien Weglänge im Düsenendquerschnitt kann die maximale Spaltbreite soweit vergrößert werden, daß das Produkt aus Spaltquerschnitt f_0 und Molekülzahl N_1 im Einheitsvolum konstant bleibt. Die Zahl der sekundlich

den Spalt durchquerenden Moleküle nimmt dann trotz verminderter wahrscheinlichster Schwirrgeschwindigkeit w infolge der gleichzeitig ansteigenden Systemgeschwindigkeit V senkrecht zur Spaltebene um den Faktor

$$F_x = \frac{e^{-(V/w)^2} + \sqrt{\pi} \cdot \frac{V}{w} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{V/w} e^{-x^2} dx \right)}{\sqrt{1 + \frac{z-1}{z} \left(\frac{V}{w} \right)^2}}$$

zu. Bei $V/w = 3,35$ und $z = 1,4$ — was etwa der MACH-Zahl 4 entspricht — beträgt $F_x = 5,8$.

2. Verringerte Verluste durch den Abbildungsspalt infolge geänderter Intensitätsverteilung der aus dem Ofenspalt in den Halbraum austretenden Molekularstrahlen im Sinn einer stärkeren Bevorzugung der achsennahen Richtungen, als dies dem Kosinusgesetz für Molekularstrahlen ohne überlagerte Systemgeschwindigkeit entspricht. Wenn durch den Abbildungsspalt ein kreiskegelförmiges Strahlenbündel mit dem halben Öffnungswinkel $d\psi$ aus der Gesamtheit der den Halbraum hinter dem Ofenspalt erfüllenden Strahlen herausgeblendet wird, so ist bei vorhandener Systemgeschwindigkeit V die restliche Strahlintensität hinter dem Abbildungsspalt

$$F_{2d\psi} = \left\{ \left[1 + 2 \left(\frac{V}{w} \right)^2 \cos^2 d\psi \right] e^{-\frac{V^2}{w^2}} + \sqrt{\pi} \cdot \frac{V}{w} \left[\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{V \cos d\psi / w} e^{-x^2} dx}{\sin^2 d\psi} - \frac{\cos d\psi}{\sin^2 d\psi} e^{-\frac{V^2 \sin^2 d\psi}{w^2}} \left(\cos^2 d\psi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{V \cos d\psi / w} e^{-x^2} dx \right) \right] \right\} / \sqrt{1 + \frac{z-1}{z} \left(\frac{V}{w} \right)^2}$$

mal höher, als sie es bei fehlender Systemgeschwindigkeit und entsprechend höherer wahrscheinlichster Schwirrgeschwindigkeit wäre. Im bereits erwähnten Zahlenbeispiel wird für $d\psi = 5^\circ$ der Intensitätsgewinn hinter dem Abbildungsspalt $F_{10^\circ} = 68$ mal höher als bei klassischen Strahlerzeugungsmethoden.

3. Eine Verlagerung des Wertes der in Achsenrichtung resultierenden Geschwindigkeit $v \cdot \cos \psi$ des Molekularstrahls zu um jeweils V höheren Beträgen, und eine dem Quadrat hiervon entsprechende Vergrößerung der verfügbaren kinetischen Stoßenergien.

4. Eine teilweise Geschwindigkeitshomogenisierung; da sich der relative Beitrag

$\frac{v \cdot \cos \psi}{v \cos \psi + V}$, den die unter verschiedenen steilen Winkeln ψ zur Achse geneigten verschiedenen hohen Schwirrgeschwindigkeiten v zur achsenparallelen resultierenden Geschwindigkeit ($v \cdot \cos \psi + V$) liefern, mit wachsenden V -Werten immer mehr nivelliert, und der im Strahl am häufigsten vorkommende Wert der Geschwindigkeitsresultierenden sich immer mehr V nähert. Hierdurch ermäßigen sich die Verluste bei einer anschließenden Geschwindigkeitshomogenisierung, — soweit diese nicht überhaupt ausfallen kann.

Während Richtungen, Translationsgeschwindigkeiten und Massen zur Erzielung definierter Stoßkonstellationen innerhalb geringstmöglicher Toleranzen vereinheitlicht werden sollten, genügt es, sonstige, fallweise erwünschte Strahl-

präparationen qualitativ durchzuführen, so daß sie nicht mit zusätzlichen Intensitätsverlusten des Strahls verbunden sein müssen. So können Spins oder Dipolachsen bestimmter Moleküle in einem ausgezeichneten Winkel zur Geschwindigkeitsrichtung durch Anlegen geeigneter magnetischer oder elektrischer Felder gleichgeschaltet werden; es können bestimmte Elektronenanregungsstufen begünstigt werden durch Beschiebung des Molekularstrahls mit Resonanzphotonen usw.

Bei der Kreuzung zweier miteinander reaktionsfähiger und derart präparierter Molekularstrahlen unter einem bestimmten Winkel φ sind dreierlei Ereignisse nebeneinander möglich:

1. Moleküle der beiden Strahlen durchdringen den gemeinsamen Kreuzungsraum $V = h d^2 / \sin \varphi$ in solchen Abständen voneinander, daß ihre Bahnen unbeeinflußt bleiben;

2. Moleküle der beiden Strahlen begegnen einander und streuen elastisch. Dieser Vorgang ist nachweisbar durch Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes;

3. Moleküle der beiden Strahlen begegnen einander und lösen eine Reaktion aus, die an einem oder an beiden der neu gebildeten Teilchen durch nicht mit den Gesetzen elastischer Stoße zu vereinbarende Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen, durch Änderung der Partikelmassen oder durch Änderung innerer Energien oder durch mehrere solcher Änderungen gleichzeitig nachweisbar ist, — wobei die Summe der Änderungen der freigewordenen Reaktionsenergie entsprechen sollte. *Messungen von Richtungen, Geschwindigkeiten, Massen und Anregungszuständen derartiger Moleküle vor und nach der Reaktion wären daher geeignet, die Kernfrage nach Erscheinungsform und Aufteilung der Reaktionsenergie zu beantworten.*

Es wäre nun interessant, nicht nur diese Änderungen zu messen, sondern auch durch Variation der Stoßbedingungen hinsichtlich Relativgeschwindigkeit, Anregungszustand usw. die günstigste Voraussetzung für das Eintreffen von Fall 3 zu ermitteln. Bedingung ist dabei, daß die Konzentrationen der auf die geschilderte Art und Weise neu gebildeten Partikel und die Empfindlichkeit der verschiedenen möglichen Meßmethoden miteinander in Einklang zu bringen sind.

Die wahrscheinliche Zahl der sekundlichen Molekülzusammenstoße im Kreuzungsraum zweier homogenisierter Strahlen, deren Partikel sich mit den Geschwindigkeiten v_A bzw. v_B unter dem Winkel φ aufeinander zu bewegen, läßt sich bei gleichen geometrischen Abmessungen beider Strahlen zu $Z_{AB} = n_A \cdot n_B \cdot \sigma_{AB}^2 \pi \cdot v_{AB} [\text{s}^{-1}]$ abschätzen. Das Verhältnis der wahrscheinlichen zur maximal möglichen Stoßzahl beträgt:

$$\beta = \frac{Z_{AB}}{dh \sqrt{n_A n_B v_A v_B}} = \sqrt{n_A n_B} \cdot \sigma_{AB}^2 \pi \cdot \frac{d}{\sin \varphi} \cdot \sqrt{\frac{v_A}{v_B} + \frac{v_B}{v_A} - 2 \cos \varphi}.$$

In diesen Formeln bedeuten n_A und n_B die Teilchenzahlen pro Volumeinheit in jedem der beiden Strahlen, $\sigma_{AB}^2 = \pi/2 \cdot (\sigma_A + \sigma_B)^2$ den Wirkungsquerschnitt¹ eines Zusammenstoßes und

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2 v_A v_B \cos \varphi} = 2 \sqrt{\frac{k}{m_{M=1}}} \cdot \sqrt{\frac{T_A}{M_A} + \frac{T_B}{M_B} - 2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{T_A \cdot T_B}{M_A \cdot M_B}}$$

¹ JAECKEL und JAWTUSCH [93] haben bei ihren Molekularstrahlversuchen Stoßquerschnitte gefunden, die mehrfach größer sind als das arithmetische Mittel aus den gaskinetischen Durchmessern der stoßenden Teilchen. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache wären alle folgenden Zahlenwerte für die sekundliche Stoßzahl um etwa eine Größenordnung zu erhöhen.

die relative Geschwindigkeit von Teilchen aus verschiedenen Strahlen zueinander. Man kann die Formel für die Zahl der sekundlichen Zusammenstöße unter den beschriebenen Voraussetzungen noch etwas umformen, um die Einflußgrößen besser übersehen zu können, und erhält dann:

$$Z_{AB} = \frac{2\sqrt{k/m_M=1}}{(e\pi)^4} \cdot \frac{p_A}{p} \cdot \frac{p_B}{p} \sqrt{\frac{T_A}{M_A} + \frac{T_B}{M_B} - 2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{T_A T_B}{M_A M_B}} \cdot \frac{(\sigma_A + \sigma_B)^2}{\sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2} \cdot \left(\frac{dv}{v} \right)^2 \cdot \frac{d_0^2 h_0^3}{r^4 (2 \cdot l/r + 1) \cdot \sin \varphi},$$

bzw. für den speziellen Fall $T_A = T_B$:

$$Z_{AB} = 6,858 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{p_A}{p} \cdot \frac{p_B}{p} \sqrt{T} \cdot \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} - 2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{M_B M_B}} \cdot \frac{(\sigma_A + \sigma_B)^2}{\sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2} \cdot \left(\frac{dv}{v} \right)^2 \cdot \frac{d_0^2 h_0^3}{r^4 (2 \cdot l/r + 1) \cdot \sin \varphi}.$$

Hat man beispielsweise bei $p = 76$ mm Hg und $T = 3000$ °K in der Erzeugungskammer A verdampften Kohlenstoff und in der Erzeugungskammer B Wassergas (eventuell auch stöch. Knallgas-Niederdruckflamme) vorliegen und bewahrt im Strahl nur die im Gleichgewichtsfall vorhandenen 99,6 Volumprozente C_2 mit einem gaskinetischen Durchmesser von näherungsweise 3,4 AE bei einer Translationsgeschwindigkeit von $v_A = 2040$ m/s, im Strahl B nur die 32,0 Volumprozente OH mit $\sigma_B \approx 2,6$ AE und $v_B = 2420$ m/s, so ergibt sich bei $dv/v = 10^{-2}$:

$$Z_{AB} = 9,588 \cdot 10^{14} \frac{d_0^2 h_0^3}{r^4 (2 \cdot l/r + 1) \sin \varphi}$$

ein Ausdruck, der nur noch und in entscheidendem Maße von der Strahlgeometrie abhängt. Dies wird übersichtlich in der Tabelle 1 gezeigt, in der für das Kohlenstoff-Hydroxyl-Beispiel bei zwei verschiedenen Ofentemperaturen und konstantem Wert für den Schnittwinkel alle übrigen Größen im Rahmen des wahrscheinlich Möglichen variiert werden und anschließend die dabei erreichbaren Ofendrücke, Partialdrücke, Translationsgeschwindigkeiten und Aufenthaltsdauern im Kreuzungsraum der Strahlpartikelchen sowie ihr sekundlicher Durchsatz pro Strahlquerschnittsfläche, die wahrscheinliche sekundliche Stoßzahl und die Stoßausbeute angegeben werden.

Eine weitere Tabelle gilt für gekreuzte H_2 - und O_2 -Strahlen zur Untersuchung der Reaktion $O_2 + H_2 \rightarrow 2 OH$ unter gleichen geometrischen Bedingungen und Speicherdrucken, jedoch bei Speichertemperaturen von $T_{H_2} = 2000$ °K und $T_{O_2} = 2200$ °K.

Man gelangt also zu verhältnismäßig hohen Werten für die wahrscheinliche sekundliche Stoßzahl, wenn man große Öffnungswinkel der beiden Strahlbündel, sowohl in der horizontalen wie in der senkrechten Schnittebene, zuläßt. Daß hierdurch gleichzeitig der Schnittwinkel φ der beiden Bündel eine größere Ungenauigkeitsbreite erhält, stört nicht besonders, da beim Stoß, weil der Winkel zwischen Relativgeschwindigkeit und Stoßnormalen alle Werte zwischen 0 und $\pi/2$ annehmen kann, sowieso Streuung in alle möglichen Richtungen erfolgt.

Noch höhere Werte für Z_{AB} werden mittels der klassischen Strahlerzeugungsmethode nur verwirklichbar sein, wenn man entweder die Toleranzen dv/v für die Geschwindigkeitshomogenisierung erhöht oder die Untersuchungen statt an neutralen Teilchen an Ionen durchführt, wobei höhere Intensitäten der homogenisierten primären Strahlenbündel erzielbar sein dürften. Bei Teilchen mit elek-

Tabelle 1. Untersuchungsbeispiele: C₂ + OH → CO + CH)

φ	[Grad]	150°	150°	150°
d_0	[m]	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
h_0	[m]	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
r	[m]	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}$
l	[m]	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$
$d_{0d} \approx \arctg(d_0/r)$	[Grad]	$\langle 10'; < 10'; < 10'; < 10'$	$\langle 10'; < 10'; < 10'; < 10'$	$\langle 10'; < 10'; < 10'; < 10'$
$d_{0h} \approx \arctg(h_0/r)$	[Grad]	$4^{\circ} 20'; 16^{\circ} 40'; 31^{\circ} 0'; 45^{\circ} 0'$	$4^{\circ} 20'; 16^{\circ} 40'; 31^{\circ} 0'; 45^{\circ} 0'$	$4^{\circ} 20'; 16^{\circ} 40'; 31^{\circ} 0'; 45^{\circ} 0'$
$V = \frac{h_0 d_0 (2 l / r + 1)^3}{\sin \varphi}$	[m ³]	$1,5 \cdot 10^{-13}$	$2,5 \cdot 10^{-13}$	$6,0 \cdot 10^{-13}$
$d_0^2 h_0^3$	[m]	$3,0 \cdot 10^{-13}; 1,3 \cdot 10^{-11}; 2,1 \cdot 10^{-10}; 9,5 \cdot 10^{-10}$	$1,2 \cdot 10^{-12}; 5,1 \cdot 10^{-11}; 8,2 \cdot 10^{-10}; 3,8 \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^{-11}; 1,3 \cdot 10^{-9}; 2,1 \cdot 10^{-8}; 9,5 \cdot 10^{-8}$
$r^4 (2 l / r + 1) \sin \varphi$				
$\rho_A = \rho_B = \rho$	[at]	0,1	0,1	0,1
$T_A = T_B = T$	[°K]	2500	3000	3500
ρ_{C_2}/ρ	[—]	1,000	0,996	0,992
ρ_{OH}/ρ	[—]	0,062	0,129	0,250
v_{C_2}	[m/s]	1860 ± 19	2040 ± 20	2200 ± 22
v_{OH}	[m/s]	2200 ± 22	2420 ± 24	2600 ± 26
t_{C_2}	[s]	$1,9 \cdot 10^{-8}; 1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-7}; 9,5 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-8}; 2,9 \cdot 10^{-8}$
t_{OH}	[s]	$7,1 \cdot 10^{10}; 8,9 \cdot 10^9$	$1,1 \cdot 10^{11}; 1,4 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{11}; 3,9 \cdot 10^{10}$
$dN_{C_2} \cdot \sin^2 \psi$	[s ⁻¹]	$4,6 \cdot 10^{12}; 5,7 \cdot 10^{11}$	$1,3 \cdot 10^{13}; 1,6 \cdot 10^{12}$	$2,5 \cdot 10^{11}; 6,5 \cdot 10^{10}$
$dN_{OH} \cdot \sin^2 \psi$	[s ⁻¹]	$1,1 \cdot 10^{11}; 1,4 \cdot 10^{10}$	$1,0 \cdot 10^{11}; 2,7 \cdot 10^{10}$	$1,1 \cdot 10^{11}; 7,0 \cdot 10^{10}$
Z_{AB}	[s ⁻¹]	$1,3 \cdot 10^2; 5,4 \cdot 10^3; 8,6 \cdot 10^4; 4,0 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^3; 5,2 \cdot 10^4; 7,8 \cdot 10^5; 3,6 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^4; 4,1 \cdot 10^7; 1,6 \cdot 10^{-7}; 2,6 \cdot 10^{-7}$
ρ	[—]	$5,2 \cdot 10^{-9}; 1,4 \cdot 10^{-7}; 5,4 \cdot 10^{-8}; 8,7 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-8}; 4,1 \cdot 10^{-7}; 1,6 \cdot 10^{-7}; 2,6 \cdot 10^{-7}$	$6,4 \cdot 10^{-8}; 1,8 \cdot 10^{-6}; 6,9 \cdot 10^{-7}; 1,1 \cdot 10^{-6}$

φ	[Grad]	150°	150°	150°
d_0	[m]	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
h_0	[m]	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
r	[m]	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3};$	$5 \cdot 10^{-3}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3};$	$5 \cdot 10^{-3}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}$
l	[m]	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2};$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2};$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}$
$d\alpha \approx \arctg(\vec{d}_0/r)$	[Grad]	$10'; 40'; 1^{\circ}10';$	$40'; 2^{\circ}50'; 6^{\circ}20';$	$1^{\circ}20'; 6^{\circ}20'; 11^{\circ}20'$
$d\alpha \approx \arctg(h_0/r)$	[Grad]	$4^{\circ}20'; 16^{\circ}40'; 31^{\circ}0';$	$4^{\circ}20'; 16^{\circ}40'; 31^{\circ}0';$	$4^{\circ}20'; 16^{\circ}40'; 31^{\circ}0'; 45^{\circ}0'$
$V = \frac{h_0 d_0 (2l/r + 1)^3}{\sin \varphi}$	[m³]	$6 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 5 \cdot 10^{-9}$
$d_0^2 h_0^3$	[m³]	$1,2 \cdot 10^{-10}; 5,1 \cdot 10^{-9}; 8,2 \cdot 10^{-8}; 3,8 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-9}; 1,3 \cdot 10^{-7}; 2,0 \cdot 10^{-6}; 9,5 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-8}; 5,1 \cdot 10^{-7}; 8,3 \cdot 10^{-6}; 2,8 \cdot 10^{-5}$
$r^4 (2l/r + 1)^3$				
β				

$p_A = p_B = p$	[at]	0,01	0,001	0,001
$T_A = T_B = T$	[°K]	3000	2500	3000
p_{C_2}/p	[—]	0,988	0,999	0,964
p_{OH}/p	[—]	0,060	0,076	0,010
v_{C_2}	[m/s]	2040 ± 20	1860 ± 19	2040 ± 20
v_{OH}	[m/s]	2420 ± 24	2200 ± 22	2420 ± 24
t_{C_2}	[s]	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$
t_{OH}	[s]	$2,9 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$9,5 \cdot 10^{-6}$
$dN_{\text{C}_2} \cdot \sin^2 \psi$	[s⁻¹]	$1,5 \cdot 10^{12}; 2,5 \cdot 10^{12}; 9,7 \cdot 10^{13}; 2,7 \cdot 10^{14}$	$7,0 \cdot 10^{12}; 1,1 \cdot 10^{13}; 4,5 \cdot 10^{14}; 1,3 \cdot 10^{15}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$
$dN_{\text{OH}} \cdot \sin^2 \psi$	[s⁻¹]	$1,8 \cdot 10^{11}; 3,0 \cdot 10^{11}; 1,2 \cdot 10^{13}; 3,3 \cdot 10^{13}$	$1,1 \cdot 10^{12}; 1,7 \cdot 10^{12}; 6,9 \cdot 10^{13}; 1,9 \cdot 10^{14}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$
Z_{AB}	[s⁻¹]	$5,3 \cdot 10^4; 2,3 \cdot 10^6; 3,6 \cdot 10^7; 1,7 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^6; 6,6 \cdot 10^7; 1,1 \cdot 10^9; 4,9 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{13}; 2,4 \cdot 10^{13}; 9,5 \cdot 10^{14}; 2,6 \cdot 10^{15}$
β	[—]	$1,2 \cdot 10^{-7}; 2,7 \cdot 10^{-6}; 1,0 \cdot 10^{-6}; 1,8 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-7}; 1,6 \cdot 10^{-5}; 6,2 \cdot 10^{-6}; 8,8 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-7}; 1,1 \cdot 10^{-5}; 4,3 \cdot 10^{-6}; 7,1 \cdot 10^{-6}$

I. SÄNGER-BREDT:

Tabelle 2. (Untersuchungsbeispiel: $\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{OH}$)

q	[Grad]	150°	150°	150°
d_0	[m]	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$
h_0	[m]	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
r	[m]	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-2}$
l	[m]	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-1}; 5 \cdot 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-1}$
σ_{H_2}	[AE]	2,22	2,22	2,22
σ_{O_2}	[AE]	3,02	3,02	3,02
$\rho_A = \rho_B = \rho$ [at]		0,1	0,01	0,001
T_{H_2}	[°K]	2000	2000	2000
T_{O_2}	[°K]	2200	2200	2200
ρ_{H_2}/ρ	[—]	0,994	0,982	0,944
ρ_{O_2}/ρ	[—]	0,991	0,972	0,913
v_{H_2}	[m/s]	5750 ± 58	5750 ± 58	5750 ± 58
v_{O_2}	[m/s]	1510 ± 15	1510 ± 15	1510 ± 15
t_{H_2}	[s]	$6 \cdot 1 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 7 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 7 \cdot 10^{-7}$
t_{O_2}	[s]	$2 \cdot 3 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 4 \cdot 10^{-6}$
$dN_{\text{H}_2} \sin^2 \psi$	[s ⁻¹]	$5 \cdot 1 \cdot 10^{11}; 8 \cdot 1 \cdot 10^{11}; 3 \cdot 3 \cdot 10^{13}; 9 \cdot 2 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 1 \cdot 10^{12}; 8 \cdot 1 \cdot 10^{12}; 3 \cdot 3 \cdot 10^{14}; 9 \cdot 0 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 8 \cdot 10^{13}; 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 10^{13}; 3 \cdot 1 \cdot 10^{15}; 8 \cdot 7 \cdot 10^{16}$
$dN_{\text{O}_2} \sin^2 \psi$	[s ⁻¹]	$5 \cdot 8 \cdot 10^{10}; 8 \cdot 9 \cdot 10^{10}; 3 \cdot 7 \cdot 10^{12}; 1 \cdot 0 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 6 \cdot 10^{11}; 8 \cdot 9 \cdot 10^{11}; 3 \cdot 6 \cdot 10^{13}; 1 \cdot 0 \cdot 10^{14}$	$5 \cdot 3 \cdot 10^{12}; 8 \cdot 9 \cdot 10^{12}; 3 \cdot 4 \cdot 10^{13}; 9 \cdot 7 \cdot 10^{14}$
Z_{AB}	[s ⁻¹]	$4 \cdot 8 \cdot 10^3; 2 \cdot 1 \cdot 10^5; 3 \cdot 2 \cdot 10^6; 1 \cdot 6 \cdot 10^7$	$4 \cdot 7 \cdot 10^5; 2 \cdot 0 \cdot 10^7; 3 \cdot 1 \cdot 10^8; 1 \cdot 5 \cdot 10^9$	$4 \cdot 1 \cdot 10^7; 1 \cdot 8 \cdot 10^9; 2 \cdot 8 \cdot 10^{10}; 1 \cdot 4 \cdot 10^{11}$
β	[—]	$2 \cdot 8 \cdot 10^{-8}; 7 \cdot 7 \cdot 10^{-7}; 2 \cdot 9 \cdot 10^{-7}; 5 \cdot 1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 8 \cdot 10^{-7}; 7 \cdot 4 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 6 \cdot 10^{-6}; 6 \cdot 8 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 7 \cdot 10^{-5}; 4 \cdot 8 \cdot 10^{-5}$

V₁ 10⁻¹

trischen oder magnetischen Momenten können die entsprechenden Homogenisierungsmethoden mit ihren geringen Intensitätsverlusten natürlich auf jeden Fall angewendet werden.

Welcher Prozentsatz der Z_{AB} -Stöße elastisch bleibt und welcher darüber hinaus zu einer chemischen Reaktion führt, soll einer der Gegenstände späterer Messung sein. Wahrscheinlich wird sich dieser Bruchteil um so mehr den Werten Eins oder Null nähern, je einheitlicher die Stoßbedingungen im Kreuzungsraum sind. Bei einem Bruchteil α für den Betrag der vollzogenen Reaktionen im Verhältnis zur Zahl der Zusammenstöße erhält man $2\alpha Z_{AB}$ neu gebildete Partikel in der Sekunde. Würden die Bewegungsrichtungen dieser $2\alpha Z_{AB}$ Moleküle völlig gleichmäßig im Raum verteilt sein, so würden pro Sekunde auf das Flächen-element dF einer um den Mittelpunkt des Kreuzungsraums mit dem Radius ϱ

gelegten Hohlkugel insgesamt $\frac{\alpha Z_{AB} dF}{2\pi \varrho^2}$ Teilchen auffallen, das heißt von jeder

Sorte 50% bei verschiedenartigen Reaktionsprodukten; im Zahlenbeispiel, Tab. 1, S. 23 (Spalte 2, Kolonne 3) so für $\alpha = 1$ und $\varrho = 1 \text{ mm}$ $8,7 \cdot 10^{+9}$ CH-Moleküle und $8,7 \cdot 10^{+9}$ CO-Moleküle pro cm^2 und sec.

Die relative kinetische Energie jedes Zusammenstoßes im Kreuzungsraum beträgt:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{v^2}{2} \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{M_A \cdot M_B}{M_A + M_B} \cdot 2 k \left[\frac{T_A}{M_A} + \frac{T_B}{M_B} - 2 \cos \varphi \sqrt{\frac{T_A \cdot T_B}{M_A \cdot M_B}} \right].$$

Im Zahlenbeispiel für $\text{C}_2 + \text{OH}$ wird $\varepsilon_{AB} = 1,50 \cdot 10^{-20} \text{ mkg}$. Dies ist etwa der fünfte Teil des Energiebetrages, der bei einer allfälligen Reaktion $\text{C}_2 + \text{OH} \rightarrow \text{CO} + \text{CH}$ frei würde. Die relative kinetische Energie nach dem Zusammenstoß könnte also günstigstenfalls auf das 6-fache der Energie zu Beginn des Stoßes anwachsen, wenn Reaktion stattfindet und die inneren Molekulenergien am Energieaustausch unbeteiligt bleiben. — Ein Stoß zwischen den in Tab. 2 behandelten H_2 - und O_2 -Molekülen hätte eine relative kinetische Energie von $0,80 \cdot 10^{-20} \text{ mkg}$ und dürfte daher normalerweise nicht zur Bildung von Hydroxyl führen, weil der Prozeß $\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ OH}$ zwischen nicht angeregten Partikeln endotherm mit einem Energieverbrauch von $1,56 \cdot 10^{-20} \text{ mkg}$ verläuft. Die Relativgeschwindigkeit der stoßenden Teilchen müßte also entweder mindestens auf das Doppelte anwachsen, wobei — unter gleichbleibenden Ofenverhältnissen — die Intensitäten in jedem Strahl beim Aussieben auf etwa die Hälfte zurückgehen würden, oder die stoßenden Teilchen müßten in hinreichender Höhe eine unmittelbar in Reaktionsenergie überführbare Anregungsenergie aufweisen. Die Prüfung entspricht der Möglichkeiten wäre wieder eine der Aufgaben späterer Messung.

An dieser Stelle muß deshalb vielleicht erwähnt werden, daß alle optischen Erscheinungen der Strahlungsanregung und -dämpfung durch Stoß wahrscheinlich im Kreuzungsraum konzentriert bleiben, da die Aufenthaltsdauer

$\tau = \frac{d_0 (2 \cdot l/r + 1)}{v \cdot \sin \varphi}$ der Strahlmoleküle im Kreuzungsraum, wie aus den Zahlen-tafeln ersichtlich, meist über den Zeiten für die mittlere Leuchtdauer von Elek-

tronenanregungen $\tau_{el} = \frac{3 m_0 \cdot c}{8 \pi^2 e^2} \cdot \lambda^2 = 4,49 \cdot \lambda^2 [\text{cm}] [\text{s}]$ und weit oberhalb der

Aufenthaltsdauern von etwa 10^{-13}s der Moleküle in der gegenseitigen Potentialmulde beim Stoß zu liegen kommt. Die Anzahl der produzierten oder verschwindenden Lichtquanten kann man in erster Näherung so abschätzen, daß man jedem Reaktionsstoß ein Lichtquant zuordnet, also mit einem erzielbaren

Strom von $\pm a Z_{AB}/4\pi e^2$ Quanten pro Sekunde und pro Flächeneinheit rechnet.

Nachdem so in groben Zügen und an Hand einiger anschaulicher Beispiele die Eigenarten und die Leistungsfähigkeit der Molekularstrahlmethode aufgezeigt worden sind, soll noch kurz erörtert werden, wieweit bisher bekannte Meßmethoden und -genauigkeiten auch tatsächlich ausreichen, um die mit ihr herstellbaren Vorgänge nachzuweisen.

Jede Messung wird einerseits die Intensitätsschwächung der unabgelenkten, unveränderten Molekularstrahlen zu erfassen versuchen, und andererseits das Eintreffen eines gewünschten Effektes durch Nachweis des chemischen Charakters sowie durch Messung der bevorzugten Richtungen, Massen, Geschwindigkeiten und Anregungszustände der nach erfolgtem Stoß auseinanderstrebenden Teilchen.

Der Beweis für die Durchführbarkeit von *Intensitätsschwächungsmessungen im primären Strahl* wurde bereits durch die experimentellen Arbeiten von JAECKEL und JAWTUSCH [91 bis 93] geliefert.

Bei *Messungen an den gestreuten Teilchen* laufen die Richtungsmessungen auf eine Bestimmung der Intensitätsmaxima der vom Kreuzungsraum aus in alle Richtungen wegfliegenden Teilchen hinaus; Geschwindigkeiten können aus der kinetischen Energie oder dem Impuls grundsätzlich bestimmt werden, wenn unmittelbare Verfahren — wie das von FIZEAU benutzte — zu umständlich oder zu unempfindlich werden. *Massen* können durch Wägung oder im Massenspektrum oder durch chemische Identifizierung der Moleküle bestimmt werden. *Innere Energien* wird man, soweit sie mit Strahlung verbunden sind, mittels bekannter spektroskopischer Verfahren zu erfassen trachten, wobei es diesmal mehr noch als auf das Auflösungsvermögen auf die Lichtempfindlichkeit der Apparaturen ankommt. Im Kreuzungsraum gebildete *Ionen* endlich kann man mittels elektrischer Felder herausziehen und ihre Stromstärken bestimmen.

Die Empfindlichkeitsschwelle der heute bekannten Meßgeräte für die elementaren Größen: Länge, Zeit, Masse und Kraft liegt fast überall in der Größenordnung von 10^{-9} , wenn man sich im cgs-System ausdrückt.

So wurden bei Molekularstrahlversuchen von ESTERMANN und seinen Mitarbeitern [140, 141] noch mittlere Schichtdicken von $\Delta l = 2 \cdot 10^{-9}$ cm nachgewiesen. Das sind Abstände, die etwa dem zehnten Teil einer dicht gepackten monomolekularen Schicht mit 10^{15} Molekülen pro cm^2 entsprechen. 10^8 Moleküle zum Beispiel wären auf diesem Wege erst nach zwölfjähriger Versuchsdauer nachweisbar.

Mit dem Kathodenstrahlloszillographen lassen sich Zeitspannen von $\Delta t = 10^{-9}\text{s}$ verfolgen. Das sind Zeiten, die unterhalb der mittleren Strahlungsdauer eines Lichtquants im sichtbaren Wellenlängenbereich liegen.

Mittels einer Waage mit magnetischer Aufhängung nach BEAMS lassen sich noch $\Delta m = 10^{-9}$ Massengramm nachweisen. Dies entspricht $2 \cdot 10^{13}$ Molekülen vom Molgewicht 30.

Mit dem PIRANI-Hitzdrahtmanometer können noch Druckunterschiede von $\Delta d = 10^{-9}$ dyn/cm² nachgewiesen werden, mittels der TÖPLERSchen Drucklibelle sogar noch 10^{-11} dyn/cm². Die gleiche Größenordnung wird nach HUNTON und ELLET [142 bis 144] mit der von JOHNSON und TAYLOR für Molekularstrahlen entwickelten sogenannten „Ionisierungsschlauch“-Methode erreicht. Hier werden in einer metallischen, zylinderförmigen Detektorzelle die auf einen glühenden Wolframdraht im Zylinderinnern fallenden Moleküle positiv ionisiert und der Elektrizitätsübergang zwischen Draht und Zylinderwand gemessen. Ein Druck von 10^{-11} dyn/cm² entspricht 10^6 sekundlich mit 1000 m Geschwindigkeit senkrecht auf 1 cm² Fläche aufprallenden Teilchen vom Molgewicht 30, oder dem Gewicht von $2 \cdot 10^8$ auf einem Quadratzentimeter ruhenden Teilchen gleicher Masse.

Elektrische Ströme können mit Goldblattelektrometer bis hinab zu 10^{-15} A gemessen werden, bei Anwendung einiger Kunstgriffe sogar bis zu 10^{-18} A. Dies entspricht einer Stromstärke von 30 Elektronen pro Sekunde.

Bei Lichtströmen liegen die Empfindlichkeitsschwellen womöglich noch günstiger. Das dunkeladaptierte menschliche Auge kann bis hinab zu 10^2 Lichtquanten im sichtbaren Bereich wahrnehmen, bzw. noch einen Lichtstrom von $dn/dt \cdot h v = 2 \cdot 10^{-10}$ erg/sec Leuchtstärke registrieren, was beispielsweise dem sekundlichen Auftreffen von $6,5 \cdot 10^3$ Cadmium-Lichtquanten der Wellenlänge 6438 AE auf die Netzhaut entspricht. Eine Strahlungsintensität von $3 \cdot 10^{-9}$ erg/cm² — das ist $5 \cdot 10^{13}$ Quanten — genügt bei blauem Licht noch, um einen Photoelektronenstrom aus Alkalimetallen auszulösen. Im Innern von reinen Kristallen ist die Zahl der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen gleich der Zahl der absorbierten Lichtquanten. Empfindliche Bolometer messen noch $2 \cdot 10^{-6}$ erg oder $2 \cdot 10^{13}$ Quanten im Ultraroten bei 10^{-5} cm.

Bei spektroskopischen Nachweismethoden wächst die Empfindlichkeit natürlich mit der Intensität der Linienanregung. In der Bunsenflamme von 2000°K sind noch 10^{12} bis 10^{15} Atome spektroskopisch nachweisbar, je nach Oszillatorenstärke der untersuchten Linie. Bei den Anregungsverhältnissen in der Bunsenflamme entsprechen diese Werte der Ausstrahlung von 10^3 bis 10^6 Lichtquanten im sichtbaren Bereich.

Diese Aufzählung möge genügen, um in flüchtiger Übersicht durch Vergleich mit den Tab. 1 und 2 zu zeigen, daß zwar nicht alle, aber doch eine ganze Reihe der bei gekreuzten Molekularstrahlen auftretenden Effekte mit heute bekannten Mitteln meßbar sein werden.

Grundsätzlich können alle Methoden, die zur Filterung von Massen, Geschwindigkeiten und Richtungen angegeben wurden, auch zur Messung dieser Größen nach vollzogener Reaktion im Kreuzungsraum dienen. Man wird indes wegen der geringen Intensität bzw. geringen Häufigkeit der darstellbaren Ereignisse Meßverfahren bevorzugen, die es erlauben, Beobachtungen über beliebig lange Zeiten zu integrieren, damit die Empfindlichkeitsschwelle der Meßorgane überschritten und darüber hinaus dem Gesetz der großen Zahlen Genüge geleistet wird.

Unter derartige Verfahren fallen alle Strahlintensitätsbestimmungen durch Messung von Niederschlagsmengen oder Farbumschlägen an gekühlten oder chemisch sensibilisierten Auffangflächen; ferner alle Spektralaufnahmen über lange Belichtungszeiten, alle Anordnungen, die eine sukzessive Absorption von Resonanzphotonen, von Ionen oder von Atomen in entsprechend präparierten Detektorzellen gestatten. Auf diese Weise läßt sich in 24stündiger Versuchsdauer bereits ein Verstärkfaktor von rund 10^5 gegenüber der in der Sekunde nachweisbaren Intensität erzielen.

Wo noch längere Beobachtungszeiten notwendig würden, wird man sich außerdem eigentlicher Verstärkeranordnungen bedienen müssen, wie Lichtquantenzähler, bei denen großenordnungsmäßig 10^4 Quanten genügen, um einen zahlbaren Photoelektronen-Entladungsstoß auszulösen. Man hat ferner das Prinzip des GEIGER-MÜLLER-Zählrohrs bereits auf Molekularstrahlen angewendet. Nach WEGERICHS [145] können nämlich sehr schnelle Molekularstrahlen in einer Ionisationszelle nachgewiesen werden, wobei das Ionisationsvermögen der Strahlen in Edelgasatmosphäre als Indikator verwendet wird und die Zahl der erfolgten Ionisationen nach einer von GREINACHER angegebenen Verstärkermethode [146] hörbar gemacht wird. Voraussetzung für die Anwendbarkeit

dieser Methode ist $\frac{v_M^2}{2} \frac{m_F m_M}{m_F + m_M} \geq \varepsilon_{ion_F}$, worin Index F „Füllgas“ und M „Moleköl im Strahl“ bedeuten.

TRENDELENBURG [147] berichtet über einen Massenspektrometerverstärker, der es gestattet, einen Ionenstrom von einigen 10^{-16} A (entsprechend etwa 10^3 Ionen pro Sekunde) nachzuweisen.

Zum Nachweis und zur Identifizierung von Niederschlägen gestreuter Teilchen unterhalb der Dicke zusammenhängender monomolekularer Schichten könnte man die Metallspitze eines Feldelektronen-Mikroskops als Detektor benutzen [148; 149].

Endlich wäre in diesem Zusammenhang auch an eine mit bestimmten Gasen gefüllte Detektorzelle zu denken, in der die erwarteten Testmoleküle imstande sind, Kettenreaktionen auszulösen; oder an Keimverfahren, bei denen auf chemisch sensibilisierten Platten gegebenenfalls sogar durch direkte chemische Reaktionen der auftreffenden Moleküle mit dem Plattenbelag Entwicklungskeime gebildet werden, die sich makroskopisch sichtbar machen lassen, — analog der Wirkung von Lichtquanten in der klassischen Photographie oder durch energiereiche Treffer ausgelösten Elektronen in der Korpuskularphotographie auf Bromsilberplatten.

Die gesamte Technik der Meßmethoden mit Verstärkeranlagen, die erst mit dem Aufkommen der Hochfrequenztechnik einerseits und der Kernphysik andererseits breitere Kreise interessierte, beschränkt sich heute noch auf einzelne, zwar hochentwickelte, aber für sehr spezielle Zwecke durchdachte Apparaturen, während eine eigentliche Systematik dieses Wissensgebietes zumindest noch nicht veröffentlicht scheint. Es soll daher im Rahmen dieser sehr allgemeinen und nur einführenden Darstellungen, die noch kein spezielles Meßproblem behandeln, auf Einzelheiten nicht noch weiter eingegangen werden. Aus Anschaulichkeitsgründen soll aber erwähnt werden, daß beispielsweise bei Anwendung lichtelektrischer Effekte Verstärkungsfaktoren von 10^7 erzielbar sind.

Diese Größenordnungen berechtigen zu der Hoffnung, daß wir eines guten Tages, wenn auch mit ansehnlichem Versuchsaufwand, so doch sicher auch an die Quellen der *Reaktionsphysik gewöhnlicher Atome* vorrücken und mit ähnlicher Genauigkeit wissen werden, in welcher Weise eine einzelne chemische Verbrennungsreaktion zwischen zwei individuellen Molekülen oder Atomen verläuft, wie wir dies für *kernchemische Verbrennungsreaktionen* schon längst wissen. Ganz konkret gesprochen, werden wir dann also z. B. aussagen können, ob die Wärmetonung einer exothermen Reaktion zunächst als kinetische Translationsenergie der dann mit großer Geschwindigkeit auseinanderfliegenden Partner des Reaktionsstoßes in Erscheinung tritt, ob sie sich von vornherein in den inneren Freiheitsgraden verbirgt oder ob beide Fälle je nach Art der Reaktion möglich sind und welche Faktoren das Eintreten des einen oder des anderen begünstigen.

Literaturverzeichnis

1. M. BODENSTEIN, Z. physik. Chem. **13**, 56 (1894).
2. J. A. CHRISTIANSEN, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., math.-fysiske Medd. **1**, 14 (1919).
3. M. BODENSTEIN und H. LÜTGEMEYER, Z. physik. Chem. **114**, 208 (1924).
4. W. JOST, Z. physik. Chem. B **3**, 95 (1929).
5. W. JOST und G. JUNG, Z. physik. Chem. B **3**, 83 (1929).
6. H. SENFTLEBEN und O. RIECHEMAYER, Ann. Physik **6**, 105 (1930).
7. H. VON HARTEL und M. POLANYI, Z. physik. Chem. B **11**, 97 (1930).
8. W. STEINER und F. W. WICKE, Z. physik. Chem., BODENSTEIN-Festband 817 (1931).

9. H. SENFTLEBEN und W. HEIN, Physik. Z. **35**, 985 (1934).
10. M. RITCHIE, Proc. Roy. Soc. London A **146**, 828 (1934).
11. E. RABINOWITCH und H. L. LEHMANN, Trans. Faraday Soc. **31**, 689 (1935).
12. K. HILFERDING und W. STEINER, Z. physik. Chem. B **30**, 399 (1935).
13. W. STEINER, Trans. Faraday Soc. **31**, 623 (1935).
14. E. RABINOWITSCH, Z. physik. Chem. B **33**, 275 (1936).
15. E. RABINOWITCH und W. C. WOOD, J. Chem. Physics **4**, 497 (1936).
16. E. RABINOWITCH und W. C. WOOD, Trans. Faraday Soc. **32**, 907 (1936).
17. W. STEINER und F. W. WICKE, Trans. Faraday Soc. **31**, 623 (1936).
18. E. RABINOWITCH, Trans. Faraday Soc. **33**, 283 (1937).
19. W. SMITH, M. RITCHIE und E. B. LUDLAM, J. Chem. Soc. London **137**, 1680 (1937).
20. A. EINSTEIN, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl., 380 (1920).
21. H. O. KNESER, Ann. Physik **11**, 761, 777 (1931).
22. H. O. KNESER, Ergebn. exakt. Naturwiss. **22**, 121 (1949).
23. A. EUCKEN, Naturwiss. **20**, 85 (1932).
24. A. EUCKEN und R. BECKER, Z. physik. Chem. B **27**, 219, 235 (1934).
25. A. EUCKEN und H. JAACKS, Z. physik. Chem. B **30**, 85, 105 (1935).
26. A. EUCKEN und E. NÜMANN, Z. physik. Chem. B **36**, 163 (1937).
27. A. EUCKEN und L. KÜCHLER, Z. techn. Physik **196**, 517 (1938).
28. L. KÜCHLER, Z. physik. Chem. B **41**, 199 (1938).
29. A. EUCKEN, Physik. Z. **39**, 831. (1938).
30. H. O. KNESER, Physik. Z. **39**, 800 (1938).
31. A. EUCKEN und S. AYBAR, Z. physik. Chem. B **46**, 195, 212 (1940).
32. A. VAN ITTERBECK und P. MARIENS, Physica **4**, 207 (1937).
33. A. VAN ITTERBECK und P. MARIENS, Physica **7**, 909 (1940).
34. K. SCHÄFER, Z. physik. Chem. B **46**, 212 (1940).
35. E. S. STEWART, Physic. Rev. **69**, 632 (1946).
36. H. SCHÜLER und H. GOLLNOW, Z. Physik **93**, 611 (1935).
37. H. SCHÜLER und T. SCHMIDT, Z. Physik **96**, 485 (1935).
38. H. SCHÜLER und H. GOLLNOW, Z. Physik **108**, 714 (1938).
39. H. SCHÜLER, H. GOLLNOW und H. HABER, Z. Physik **111**, 484, 508 (1939).
40. H. HABER, Physik. Z. **40**, 541 (1939).
41. G. DAMKÖHLER und A. SANDER, Z. Elektrochem. **48**, 523 (1942).
42. G. DAMKÖHLER, Z. Elektrochem. **48**, 62, 116 (1942).
43. G. DAMKÖHLER, Naturwiss. **31**, 305 (1943).
44. E. SÄNGER und I. BREDT, Dtsch. Luftfahrt-Forsch. UM 3509, Ainring 1943.
45. E. SÄNGER und I. BREDT, Dtsch. Luftfahrt-Forsch. UM 3538, Ainring 1944.
46. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, Arsenal de l'Aéronautique E 5/195 (1949).
47. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, C. r. acad. sci., Paris **230**, 949 (1950).
48. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, Z. angew. Math. Physik **1**, Heft 3, 209 (1950).
49. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, Z. physik. Chem. **199**, 46 (1952).
50. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, N.A.C.A. Techn. Mem. 1305 (1951).
51. E. SÄNGER, I. BREDT und P. GÖRCKE, Ann. Télécomm. **6**, 250 (1951).
52. I. BREDT, Z. Naturforsch. **6 a**, 103 (1951).
53. E. SÄNGER, Weltraumfahrt, **5**, 4 (1954).
54. E. SÄNGER, Arsenal de l'Aéronautique E 5/135 (1947).
55. E. SÄNGER, Interavia (Genf) **3**, 505 (1948).
56. E. SÄNGER, J. Amer. Rocket Soc. **76**, 27 (1949).
57. E. SÄNGER, Arsenal de l'Aéronautique E 5/150 (1948).
58. E. SÄNGER, Brennstoff-Chem. **32**, 33 (1951).
59. E. SÄNGER, Arsenal de l'Aéronautique E 5/238 (1950).
60. E. SÄNGER, Z. Naturforsch. **5 a**, 467 (1950).
61. E. SÄNGER, Arsenal de l'Aéronautique E 5/254 (1950).

Vol.
1
1955

62. E. SÄNGER, Arsenal de l'Aéronautique E 5/235 (1950).
 63. E. SÄNGER, Z. physik. Chem. **197**, 265 (1951).
 64. E. SÄNGER, Sprengtechn. **1**, 47, 151 (1952).
 65. E. SÄNGER, C. r. acad. sci., Paris **235**, 461 (1952).
 66. E. SÄNGER, Z. Naturforsch. 8 a, 204 (1953).
 67. I. BREDT, Arsenal de l'Aéronautique E 5/102, Paris 1947.
 68. I. BREDT, C. r. acad. sci., Paris **228**, 1927 (1949).
 69. I. BREDT, Beiträge zur Weltraumforschung und Weltraumfahrt, Heft **2**, 2 (1949). Stuttgart-Gesellschaft für Weltraumforschung.
 70. I. BREDT, Z. Elektrochem. **56**, 71 (1952).
 71. H. G. WOLFHARD, Z. techn. Physik **24**, 206 (1943).
 72. G. PANNETIER und A. G. GAYDON C. r. acad. sci., Paris **225**, 1300 (1947).
 73. H. G. WOLFHARD und W. G. PARKER, Nature (London) **162**, 259 (1948).
 74. H. KLAUKENS und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **193**, 512 (1948).
 75. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **194**, 169 (1948).
 76. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **199**, 89 (1949).
 77. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **201**, 561 (1950).
 78. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Physic. Soc. A **63**, 778 (1950).
 79. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **205**, 118 (1951).
 80. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Roy. Soc. London A **213**, 366 (1952).
 81. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Proc. Physic. Soc. A **65**, 19 (1952).
 82. A. G. GAYDON, Endeavour **1**, 17 (1951).
 83. H. G. WOLFHARD und W. G. PARKER, Proc. Physic. Soc. A **65**, 2 (1952).
 84. A. G. GAYDON und H. G. WOLFHARD, Flames. London: Chapman & Hall 1953.
 85. I. BREDT, Arsenal de l'Aéronautique E 5/200, Paris 1949.
 86. L. DUNOYER, C. r. acad. sci., Paris **152**, 592 (1911).
 87. O. STERN, Z. Physik **2**, 49 (1920).
 88. O. STERN, Z. Physik **3**, 417 (1920).
 89. R. PLANIOL, C. r. acad. sci., Paris **204**, 1632 (1937).
 90. R. PLANIOL, Ann. Physik (11) **9**, 177 (1938).
 91. R. JAECKEL und W. JAWTUSCH, Physik. Verh. **1**, 103 (1950).
 92. W. JAWTUSCH, Z. Physik **133**, 541 (1952).
 93. R. JAECKEL, W. JAWTUSCH und G. SCHUSTER, Physik. Verh. **4**, 170 (1953).
 94. W. GERLACH, Ergebn. exakt. Naturwiss. **3**, 182 (1925).
 95. O. STERN, Z. Physik **39**, 751 (1926).
 96. F. KNAUER und O. STERN, Z. Physik **39**, 764 (1926).
 97. I. ESTERMANN, Handwörterbuch d. Naturwiss. **1**, 596 (1931).
 98. E. FUSS, Handbuch d. Exp.-Physik **2** (Erg.), 103 (1935).
 99. I. ESTERMANN, Handb. d. Physik XXII/2, 351 (1933).
 100. A. ELLET und H. F. OLSON, Physic. Rev. (2) **33**, 118 (1929).
 101. T. H. JOHNSON, J. Franklin Inst. **207**, 639 (1929).
 102. B. LAMMERT, Z. Physik **56**, 244 (1929).
 103. F. KNAUER und O. STERN, Z. Physik **53**, 779 (1929).
 104. I. ESTERMANN und O. STERN, Z. Physik **61**, 95 (1930).
 105. I. ESTERMANN, R. FRISCH und O. STERN, Z. Physik **73**, 348 (1932).
 106. B. JOSEPHI, Z. Physik **80**, 755 (1933).
 107. H. FRIEDBURG und W. PAUL, Physik. Verh. **3**, 57 (1951); Z. Physik **130**, 493 (1951).
 108. I. ESTERMANN, SIMPSON, S. N. FONER und O. STERN, Physic Rev. (2) **71**, 250 (1947).
 109. W. GERLACH und O. STERN, Ann. Physik **74**, 673 (1924).
 110. W. GERLACH, Ann. Physik **76**, 163 (1925).

Vol
1
195

111. A. LEU, Z. Physik **41**, 551 (1927).
112. O. STERN, Z. Physik **41**, 563 (1927).
113. E. WREDE, Z. Physik **41**, 569 (1927).
114. E. WREDE, Z. Physik **44**, 261 (1927).
115. A. LEU, Z. Physik **49**, 498 (1928).
116. I. I. RABI, Z. Physik **54**, 190 (1929).
117. I. ESTERMANN, Leipziger Vorträge, 17 (1929).
118. I. I. RABI, Physic. Rev. (2) **46**, 708 (1934).
119. H. SCHEFFERS und I. STARR, Physik. Z. **37**, 217 (1936).
120. H. SCHEFFERS, Physik. Z. **37**, 220 (1936).
121. I. ESTERMANN und M. WOHLWILL, Z. physik. Chem. B **20**, 195 (1933).
122. R. FRAZER, Molecular Rays. Cambridge: 1931.
123. V. W. COHEN und A. ELLET, Physic. Rev. (2) **52**, 502 (1937).
124. U. SASAKI und M. FUKUDA, Proc. Imp. Acad. (Tokyo) **14**, 166 (1938).
125. I. I. RABI, Rev. Sci. Instruments **6**, 251 (1935).
126. A. ELLET, H. F. OLSON und H. A. ZAHL, Physic. Rev. (2) **34**, 493 (1929).
127. T. H. JOHNSON, J. Franklin Inst. **210**, 135 (1930).
128. J. B. TAYLOR, Physic. Rev. (2) **35**, 375 (1930).
129. J. B. TAYLOR, Z. Physik **52**, 846 (1929).
130. I. I. RABI, I. R. ZACHARIAS und I. M. B. KELLOG, Physic. Rev. (2) **49**, 200 (1936).
131. O. STERN, Physic. Rev. (2) **51**, 1028 (1937).
132. CHENG CHUAN KO, Physic. Rev. (2) **44**, 129 (1933).
133. L. LEWIS, Z. Physik **69**, 786 (1931).
134. F. KNAUER und O. STERN, Z. Physik **53**, 779 (1929).
135. A. ELLET und H. F. OLSON, Physic. Rev. (2) **31**, 643 (1928).
136. A. ELLET und V. W. COHEN, Physic. Rev. (2) **52**, 509 (1937).
137. O. BEECK, Ann. Physik (5) **19**, 121 (1934).
138. H. WAYLAND, Physic. Rev. (2) **52**, 31 (1937).
139. S. N. FONER und R. L. HUDSON, J. Chem. Physics **21**, 1374 (1953).
140. I. ESTERMANN, Z. Elektrochem. **31**, 441 (1925).
141. I. ESTERMANN, Z. Physik **33**, 320 (1925).
142. R. D. HUNTON und A. ELLET, Physic. Rev. (2) **49**, 381 (1936).
143. J. B. TAYLOR, Z. Physik **57**, 242 (1929).
144. T. H. JOHNSON, Physic. Rev. (2) **31**, 103 (1928).
145. A. WEGERICHS, Z. Physik **53**, 729 (1929).
146. H. GREINACHER, Z. Physik **23**, 361 (1924).
147. E. A. TRENDLENBURG und F. SMITS, Physik. Verh. **2**, 14 (1953).
148. E. W. MUELLER, Physik. Verh. **3**, 39 (1950).
149. E. W. MUELLER, Z. Naturforsch. **5 a**, 473 (1950).
150. R. VAUTHIER, C. r. acad. sci., Paris **228**, 1113 (1949).
151. A. KANTROWITZ und J. GREY, Rev. Sci. Instruments **22**, 328 (1951).
152. G. B. KISTIAKOWSKY und W. P. SLICHTER, Rev. Sci. Instruments **22**, 333 (1951).

(Dieses Verzeichnis erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.)

Space Equivalent Conditions Within the Earth's Atmosphere Physiological Aspects¹

By

H. Strughold², ARS

(With 3 Figures)

Abstract. Within the astronomically defined atmosphere, conditions are found that are physiologically equivalent to those existing in free interplanetary space. Those that occur at certain topographically fixed levels of the atmosphere are termed *static space equivalent conditions*. These levels are identical with the "functional borders" between atmosphere and space. Some of these space equivalent conditions are caused by the loss of certain vitally important atmospheric factors. The loss of these factors during flight results in anoxia, boiling of body fluids, and the impossibility of utilizing the ambient air for pressurization of the cabin.

Other static space equivalent conditions are caused by the appearance, in full force, of certain extraterrestrial factors such as cosmic rays, meteors, etc. These space equivalent conditions show variations in the vicinity of the earth, effected by the solid body of the earth and its magnetic field.

The state of zero-gravity as it is encountered in flight is defined as a *dynamic space equivalent condition*. This condition is not associated with any height or distance from the earth.

Since some of the biologically significant space equivalent conditions are encountered in present manned rocket flight, space flight is now a reality.

Zusammenfassung. Innerhalb der astronomisch definierten Atmosphäre findet man Bedingungen, die physiologisch denen des freien interplanetarischen Raumes gleichwertig sind. Diejenigen, die in bestimmten topographisch festgelegten Ebenen der Atmosphäre auftreten, werden als „statische raumäquivalente Bedingungen“ bezeichnet. Diese Flächen sind identisch mit den „funktionellen Grenzen“ zwischen Atmosphäre und Weltraum. Einige dieser raumäquivalenten Bedingungen sind verursacht durch den Verlust bestimmter lebenswichtiger atmosphärischer Faktoren. Dieser beim Flug auftretende Verlust äußert sich in Sauerstoffmangel, Kochen der Körperflüssigkeiten und in der Unmöglichkeit, die Außenluft für die Druckregelung der Kabine zu benutzen.

Andere statische raumäquivalente Bedingungen sind das Ergebnis des in voller Stärke wirksamen Auftretens gewisser extraterrestrischer Faktoren wie kosmischer Strahlung, Meteoriten usw. Diese raumäquivalenten Bedingungen zeigen Veränderungen in der Nachbarschaft der Erde, die durch deren festen Körper und ihr magnetisches Feld verursacht sind.

Der Zustand der „Nullschwere“, wie er während des Fluges angetroffen wird, wird als eine „dynamische raumäquivalente Bedingung“ definiert. Diese Bedingung steht nicht im Zusammenhang mit irgend einer Flughöhe oder dem Abstand von der Erde.

Da einige der biologisch bedeutungsvollen raumäquivalenten Bedingungen bei den heutigen Flügen bemannter Raketen angetroffen werden, ist der Raumflug nunmehr Wirklichkeit.

¹ This paper was presented at the Fifth I.A.F.-Congress at Innsbruck, August 6, 1954.

² Head, Department of Space Medicine, USAF School of Aviation Medicine, Randolph Air Force Base, Texas.

Résumé. Dans les couches supérieures de l'atmosphère on trouve certaines conditions qui équivalent physiologiquement à celles de l'espace interplanétaire. Celles qui existent dans certains niveaux de l'atmosphère fixés avec les moyens de la topographie sont appelées „conditions statiques équivalant à celles de l'espace interplanétaire“. Ces niveaux correspondent aux „limites fonctionnelles“ entre l'atmosphère et l'espace libre.

Quelques unes de ces conditions sont caractérisées par le manque de certains facteurs atmosphériques d'une importance vitale, dont l'absence — pendant le vol — se manifeste par le manque d'oxygène, l'ébullition des liquides du corps et par l'impossibilité d'utiliser l'atmosphère ambiante pour réaliser une surpression dans la cabine.

D'autres conditions sont le résultat de l'apparition en pleine force, de certains facteurs non-terrestres tels que rayons cosmiques, météores etc. Ces conditions varient dans le voisinage de la terre, influencées par la masse solide de la terre et son champ magnétique.

L'état „d'attraction nulle“ comme il arrive pendant le vol est défini comme une „condition dynamique équivalant à celle de l'espace interplanétaire“. Cette condition n'est pas associée avec une altitude ou distance de la terre déterminée.

Comme certaines de ces conditions d'une importance biologique équivalant à celles de l'espace interplanétaire sont constatées pendant le vol d'avions actuels à propulsion par fusées et avec équipage, le vol dans l'espace interplanétaire libre est maintenant une réalité.

When we consider the media which may be used for powered flight, we commonly refer to *atmosphere* and *space*. But, as the title of this paper suggests, there are actually regions within our atmosphere which, because of their physical and chemical characteristics or their physiological effects, are equivalent to those found in free space.

It is a great honor for me to have the opportunity to discuss these space equivalent conditions before this august audience of the Fifth Congress of the International Astronautical Federation.

In order to better understand the meaning of such *space equivalent conditions*, we must know first what true space conditions actually are. Briefly explained, space is a near vacuum. The number of particles in the area between the sun and γ^2 Orionis is about 10 per cm^3 [21]. This is about 3 million times less than in the best vacuum technically obtainable on earth (3.0×10^6 molecules per cm^3 at 0°C). For comparison the atmosphere at sea level contains 2.7×10^{19} molecules per cm^3 under standard conditions. Furthermore, space is criss-crossed by high speed pieces of cosmic matter like meteorites that range in size from tiny dust particles to huge lumps weighing many tons. In addition it is traversed by corpuscular and electromagnetic radiation of solar and galactic origin. Due to the tenuity of interplanetary matter, scattering of the visible part of the electro-magnetic spectrum is insignificant. For the same reason propagation of sound waves is impossible. Thus, space is mysteriously dark and silent. Such are the circumstances found in free interplanetary space.

Active life of the kind that we know, is inconceivable in such an environment. Man and the higher animals require a relatively high air pressure and a relatively high oxygen pressure, not found in space. We are unaccustomed to the various kinds of radiation in their original form, so typical of space, such as primary cosmic rays, and unaccustomed to the meteorites. While the atmosphere provides us with life sustaining pressure conditions, on the one hand, it protects us from the ingredients of space on the other. Where these atmospheric functions cease, we leave behind us certain vitally important factors intrinsic of the earth's atmosphere, and encounter certain strange factors intrinsic of

extra-terrestrial space. The cessation of these functions does not take place suddenly at the border of the atmosphere, as it is astronomically defined, i. e., at an altitude of about 1000 km (600 miles), rather it takes place in steps that begin far down in the stratosphere. This phenomenon has been discussed in various publications [22, 5, 7]. These earlier papers refer to the conditions mentioned here as the "*functional borders*" between the atmosphere and space. The location of these functional borders is identical with the beginning of the space equivalent altitudes. The concept of space equivalence, however, is broader than that of the functional borders of the atmosphere. It can be applied to all of those regions of the atmosphere which lie above the functional borders. Moreover, it is valid in the case of conditions which are not found at any specific level or point such as the gravity-free state.

In this broad range of applicability, the term "*space equivalence*" may be a useful one both for research and for teaching. It is especially apt in showing how far we have actually come in the conquest of space. In the discussion that follows,

emphasis will be given to those space-equivalent conditions which are physiological of decisive significance.

One of the most important biological constituents of the atmosphere, lost at a relatively low altitude, is oxygen. This loss, however, is not the sole reason that the oxygen problem becomes so crucial in flight. Of equal importance is the fact that we cannot store oxygen in our body, as we can carbohydrates, fats, vitamins, water, and other elements. At sea level our blood and our body tissues are saturated almost to their full capacity with oxygen. It is physically dissolved in the body fluids, and to a larger extent combined in a loose chemical union with hemoglobin and myoglobin. The oxygen capacity of the body is little more than one liter. In this respect compared with some of the diving sea-animals, we are at a considerable disadvantage. For example, the whale can submerge for 10 minutes

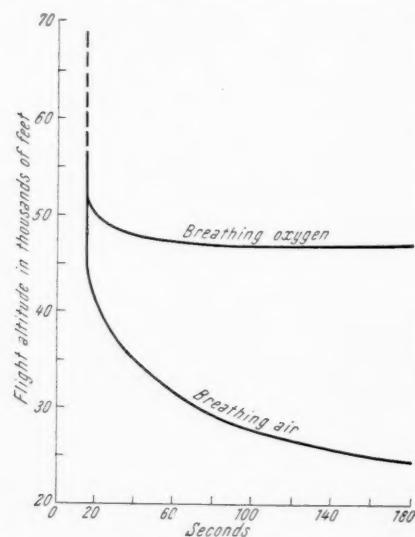


Fig. 1. Time of useful consciousness after rapid decompression breathing air (lower curve) and oxygen (upper curve). After U. C. LUFT, H. G.

CLAMANN and E. OPITZ [15].

or more, and live on oxygen stored in its huge mass of muscle globin. But a human being, without protection, suddenly transferred into the oxygen-free emptiness of outer space, would have to depend solely upon his 1 liter oxygen reserve. It takes a human being only one minute to consume about one-third of this reserve. Therefore, the complete loss of an oxygen supply must always present to him an emergency of a blitzlike nature. The question now arises: At what distance from the earth would we depend entirely on our physiological reserve of oxygen without any additional support from the atmosphere? The answer is that such a situation is encountered in the stratosphere. That this is true — has been proven by experiments in explosive decompression [1, 3, 15, 24]. During such experiments the subject is exposed in a second or less to an altitude above the critical ceiling which produces unconsciousness. The time before this

Vol
1
195

condition occurs is called the "time of useful consciousness" [1]. This time is about 3 minutes at 8 km (25,000 feet). With increasing altitude, the time decreases to a minimum of about 15 seconds at 15 km (50,000 feet). At 16 and at 17 km it is the same; and there is no reason to suppose that it will change at any higher altitudes or in space, so far as the simple loss of oxygen as the sole cause is concerned (Fig. 1).

This vital minimum of about 15 seconds has been analyzed recently with the greatest experimental skill [15]. It consists of three phases: the phase of circulation of the blood (from the heart to the brain), the oxygen desaturation phase, and the "tissue time reserve" of the brain (Fig. 2). At about 15 km or 50,000 feet, the point is reached where the body may call only upon its own meager reserve of oxygen, without finding any available supply in the atmosphere. This seems strange, since the atmospheric pressure of oxygen at 15 km is still 15 mm Hg. A hemoglobin solution or a sample of blood, exposed to the air at this altitude, would still absorb sufficient oxygen to be saturated up to about 30 percent. But the surface of our lungs, where gases are exchanged, is not in direct contact with the outer atmosphere. Instead, it is in contact with an atmosphere of its own, interposed between the surrounding air and the capillaries of the lungs: the alveolar air.

The composition of this internal atmosphere, as we refer to it, differs remarkably from that of the external atmosphere. It is permeated by carbon dioxide and water vapor. The alveolar pressure of carbon dioxide, produced in cell respiration, amounts to around 40 mm Hg. The alveolar pressure of water vapor, evaporating from the moist internal surface of the lungs, is about 47 mm Hg. at normal body temperature. Their combined pressure is 87 mm Hg., and under normal ventilation conditions, this figure remains fairly constant. For this physiological reason, the pressure of oxygen in the lungs at sea level amounts to only 100 mm Hg., instead of 160 mm Hg. as in the external atmosphere.

The relatively high pressure of carbon dioxide and water vapor everpresent in the lungs also is the reason why the alveolar pressure of oxygen at higher altitudes decreases much sooner than in the ambient air (Fig. 3). Therefore, it is the alveolar oxygen pressure that determines the severity of altitude sickness. This pressure drops to zero — — — or, more precisely, the influx of oxygen into the alveoli from outside drops to zero — — — as soon as the barometric pressure of the atmosphere decreases to 87 mm Hg. the sum of carbon-dioxide and water-vapor pressure in the lungs. The alveoli are already occupied by carbon dioxide and water vapor, both issuing from within the body itself. A pressure of 87 mm Hg. is found at about 50,000 feet (15 km). That is why, above this level, the atmosphere has no further effect upon the time of useful consciousness. The situation is physiologically the same as if the environment contained no oxygen at all. The same condition would apply even though we attempted to inhale pure oxygen.

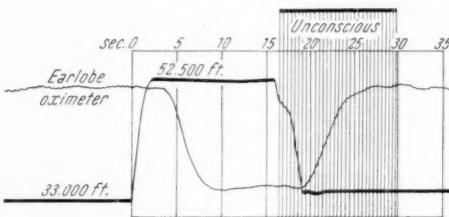


Fig. 2. The course of hypoxia and anoxia during and after an exposure of sixteen seconds to an altitude of 52,500 feet from an initial cabin altitude of 33,000 feet breathing oxygen. Unconsciousness set in 14 sec. after the 52,500 foot level was reached and 9 seconds after the oximeter reached the lowest indication. After U. C. LUFT, H. G. CLAMANN and E. OPITZ [15].

An effect similar to that of the time of useful consciousness has been observed in the duration of respiratory movements in rats after explosive decompression [10] and in the duration of the survival time [16].

From these observations we can conclude that above 15 km or 50,000 feet we are beyond the atmospheric range that supports respiration. We have reached

the physiological zero-point in the oxygen pressure of the atmosphere, even though oxygen is still found there. So far as oxygen is concerned, we encounter the same physiological situation as in free space. Hence, it is here at this 15 km level that we meet the *first of the most important space-equivalent conditions.*

Another spacelike condition is encountered at a slightly higher altitude. This condition is related to the total pressure of air and its bearing upon the *boiling point* of watery fluids. With decreasing air pressure, water boils at lower temperatures. At an air pressure of 47 mm Hg., water boils at 37°C (98.6°F). This particular temperature is our body temperature. Therefore, as soon as the barometric pressure drops to this level or below, our body fluids may be expected to boil. Quantitative experiments by H. G. ARMSTRONG [1] on warm-blooded animals in

Vol.
1
1955

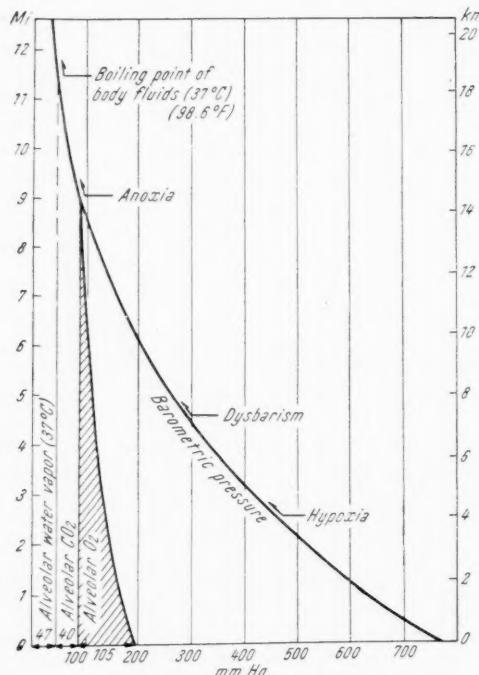


Fig. 3. Alveolar water vapor pressure, alveolar carbon dioxide pressure, alveolar oxygen pressure and barometric pressure at various altitudes under assumed normal ventilation.

the low pressure chamber, carried out as they do. This boiling effect is first manifested by the appearance of gas bubbles in the superficial mucous membranes of organs such as the mouth, and on the conjunctiva of the eye. A little later, bubbles form in the blood [1, 14, 16]. F. A. HITCHCOCK recently found bubbles in the heart of dogs only 30 seconds after an explosive decompression to 30 mm Hg. [6]. The intrapleural spaces were filled with vapor — a phenomenon which he called a vapo-thorax. The entire skin swells in what we might call a vaporemphysema, or it may even form large blisters, which has been termed by the writer as epidermolysis e vacuo.

An air pressure of 47 mm Hg. is found at an altitude of 19 km or 63,000 feet. Above this altitude, then, we lose the vitally important protection of air pressure against boiling, just as though we were surrounded by no atmosphere at all. We have reached the *physiological zero-point of air pressure*, even though there is some air pressure left. This is the *second space-equivalent condition*.

Both of the conditions just discussed are impressive enough to convince us

that we have entered a strange and completely novel environment. Here we are beyond the atmospheric range that supports respiration and keeps the body fluids in the liquid state. These two facts alone are sufficient to justify the statement that a flyer entering the region above 19 km or 63,000 feet must be considered in space, for the physiological effects upon his body are the same that he would find in the vacuum of space. At this level we deal not only with the anoxic phase, but also with the vapor phase of biological altitude effect.

Altitude variations may be assumed for both of these functional borders or space equivalent levels. One variation may be caused by pressure differences at different latitudes. These, however, might correspond to altitude differences of not more than $1\frac{1}{2}$ km during winter. Another variation depends on the temperature of the body. This is of interest from the standpoint of experimentation. The 19 km line for boiling is valid for the normal temperature of the human body. In cold blooded animals the boiling point may shift to as high as 25 km. In fact, experiments have shown that animals like lizards, turtles, hornedtoads and hibernating bats can survive altitudes up to these heights [4, 8, 17].

In order to maintain their efficiency, the crew must be artificially kept under climatic conditions near to those at sea level. Above 24 km or 80,000 feet this environment cannot be achieved in a conventional pressurized cabin, which pumps air in from the outside atmosphere and compresses it. The air density at 80,000 feet is about $1/25$ th of that at sea level. Because of this low density, tapping the ambient air with present-day compressor devices to climatize the cabin is technically prohibitive. To compress this thin air to physiological levels would also result in the production of intolerable heat for the occupants [18]. Furthermore, it is prohibitive from a toxicological point of view. For in the upper part of the stratosphere many chemical reactions take place. Of these, the formation of ozone is the most important. Ozone is a toxic gas which irritates the respiratory membranes. For all of these reasons, the *sealed cabin* in which life-sustaining components of the air are carried in tanks from the start of the flight, must now provide the environment.

The altitude at which a hermetic cabin becomes necessary represents another space-equivalent condition, from a physiological point of view as well as from a technical one. When this altitude of respiratory self-support is reached, the vehicle has no further life-sustaining contact with the earth. It is a world all its own, for a short time at least. This is the altitude that requires a cabin of such a type that must be built into future space ships.

The space-equivalent conditions which we have discussed so far are brought about by the loss of genuine properties of the earth's atmosphere. They are not affected by any extraterrestrial factors found only in space. However, with increasing altitude the extraterrestrial factors become more and more important. Finally they create space-equivalent conditions of their own, still within the atmosphere as it is astronomically defined.

The most spectacular of these extraterrestrial factors are *meteors* (L. LA PAZ, F. L. WHIPPLE [22]). Between 25 and 75 miles, or 40 and 120 km above the earth, most of these meteors are burned out by friction with the atmosphere. Above 120 km a rocket ship is beyond the "meteor safe wall" of the atmosphere, unprotected as in space. However, two modifications of this space-equivalent concept must be noted. One is caused by the fact that, in the vicinity of the Earth, we are shielded from one-half the meteors by the bulk of the earth itself. Because of this shadow effect upon meteors, we may refer to this situation as a *semi-equivalent* space condition. The second modification arises from the speed of the Earth. Our globe revolves around the sun at a speed of 18.6 miles per

second. Relative to the earth, therefore, the velocity of meteors which strike the earth from the front, in a head-on collision, is greater than the speed of those which overtake the earth and attack it from the rear.

Still another semi-equivalent space condition is encountered in the vicinity of the earth from the effects of *primary cosmic rays* [19, 25]. These rays are absorbed below 40 km or 120,000 feet and transformed into secondary rays. Above this level we are within the range of primary cosmic particles. Again, however, we must note a modification. Not only is the original intensity of these corpuscular rays affected by the filter function of the atmosphere; not only is it mitigated by the shielding function of the solid earth, it is also influenced by the earth's magnetic field.

All particles below a certain magnetic rigidity are deflected and bounced back into space by the geo-magnetic field, if they approach the earth in the neighborhood of the magnetic equator — that is to say, between 50° N latitude and 50° S latitude. This band of relatively low radiation intensity, 100 degrees of latitude wide at the base, extends as far as the orbit of the moon. By superimposing a diagram of primary cosmic rays, with their geo-magnetic variations, upon a diagram showing the range of meteors, we obtain a region around the earth's magnetic equator about 7,000 miles wide at the base and 70 miles high, where the hazards of both are minimal. The area within this belt is relatively safe, both from high-speed subatomic particles and from larger bodies of extra-terrestrial origin. It reflects the lowest degree of space-equivalence in conditions near the earth, so far as meteors and cosmic rays are concerned.

As to electromagnetic radiation, the *ultraviolet* band is most important. Its space-equivalent altitude is beyond the ozonosphere — that is, 45 km or 28 miles above the earth. Finally, there is the disappearance of the scattering effect upon *visible light* produced by air molecules. This occurs above 100 km or 60 miles and causes the so-called darkness of space.

All these space-equivalent conditions, with their variations, have one thing in common. They are found at *certain topographically fixed levels* in the atmosphere. Their effects would occur even in the case of a vehicle hovering, floating, or standing completely at rest — if such a thing were possible — at appropriate distances above the earth. Hence, these may be called *static space-equivalent* conditions.

Other problems in space flight arise as a direct result of the vehicle's own movement. They are related to a third function of the atmosphere: namely, the function of giving mechanical support to the craft. This has recently been discussed in detail by F. and H. HABER [11].

The example par excellence is the zero-gravity state. This too can be a static condition, if it is found in a supported body.

Suppose that we could build a tower over the North Pole 4,000 miles high, a distance equal to the radius of the earth. A ton of iron placed on top of this tower would weigh only one-quarter of a ton. The same ton of iron placed on top of another tower 8,000 miles high would weigh only one-ninth of a ton, and so on. But, this particular change in weight, calculated by the inverse square of the distance from the earth's center, applies only to a supported body such as the one we have imagined. In that case, the condition is indeed a static one.

With a vehicle in flight, however, the circumstance is quite different [9, 11]. Then, subgravity and even zero-gravity can be produced at any height. The trick is accomplished by the movement of the body itself, in manoeuvres where the force of inertia, or the centrifugal force, counteracts the gravitational force of the earth. Examples are found in parabolic flight path, in the orbit of an artificial satellite, or in a free fall.

In all these examples, diminished weight is a dynamic phenomenon, and not a static question of topographical location. Near the earth's surface, we can produce zero-gravity for several seconds; in the upper atmosphere we can produce it for minutes. Above 200 km or 120 miles it can be produced for any length of time, since, at this level the drag of the air becomes insignificant [20]. In fact, in space flight, zero-gravity is the typical gravitational condition. Because it is produced by motion, it represents a *dynamic space-equivalent condition*.

There are, thus, two aspects of the gravity-free state: the static and the dynamic. The static aspect depends on the distance from the earth at which its gravitational field becomes insignificant. But never non-existent. For us, however, this aspect is irrelevant. The dynamic aspect is the one that concerns us, because it has to do with gravity-free conditions found in flight.

At the present stage of rocket development, zero-gravity can be produced for several minutes. The future increase of its duration will be one measure of the progress made hereafter in the conquest of space. This coming development makes the problem of weightlessness a focal point of interest in space medicine [11, 12, 13]. It is still too early to predict whether zero-gravity will become a serious medical problem or merely an interesting physiological condition. Its duration may well decide the question.

So long as a vehicle does not leave the atmosphere entirely, its high-speed motion creates an effect which is thermo-dynamic in nature. This is the problem of heat produced by compression of and friction with the air (A. M. MAYO [25], F. HABER [25]). It has been called the "heat barrier." This undesirable by-product of movement has a decisive effect on the climate within the sealed cabin. But in a flight into space it is a transitory affair. This heat phenomenon [2] is — so-to-speak — the warm farewell proffered by the atmosphere to the space traveler, and a warm welcome when or if he returns. With increasing rarity of the air molecules, due to the decreased heat transfer, the problem of heat by compression and friction, disappears. Above this thermodynamic border of the atmosphere, the climate of the cabin is determined solely by the radiation of the Sun and the absorptive and reflective qualities of the material from which the surface layer of the craft's hull is made. The point where this pure radiation climate begins for any speed is an altitude of about 200 km or 120 miles [5]. The characteristic of this kind of space equivalence is the frictionless motion of the vehicle in this environment, for any speed.

The concept of space-equivalent altitudes shows that already we face conditions typical of space well within the stratosphere. From a purely physiological point of view, space equivalence is practically reached at an altitude of 19 km (63,000 feet). From a technical and physiological viewpoint this is true at an altitude of 200 km (120 miles). Above this level — for a fast flying vehicle — there is no environmental difference as compared with the far outer interplanetary space, except for some variations caused by the bulk of the earth, its speed, its magnetic field, as we have already mentioned and its own and reflected radiation. By far the largest part of the astronomically defined atmosphere is space equivalent with regard to one or two or more characteristics of free space. We find an environment which is no longer a true atmosphere, and yet, still is not truly space. This transitional environment was christened by K. BUETTNER the "*aeropause*" [15, 5]. It may also be termed "*preshape*", or a "*pseudo-atmosphere*". It is on this area in the atmosphere that our present interest is concentrated. It is only a matter of time until we shall have to shift our attention from this prespace to the wider range of free space.

References

1. H. G. ARMSTRONG, Principles and Practice of Aviation Medicine. Baltimore: Williams and Wilkins, 1952.
2. W. VON BRAUN, Das Mars-Projekt. Frankfurt am Main: Umschau-Verlag, 1952.
3. TH. BENZINGER, German Aviation Medicine, Vol. 1. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1950.
4. R. BRUESTLE, Luftfahrtmedizin (Berlin) **4**, 273 (1939).
5. K. J. K. BUETTNER and H. HABER, Science **115**, 656 (1952).
6. B. H. BURCH, J. P. KEMPH, E. G. VAIL, S. A. FRYE and FRED A. HITCHCOCK, J. Aviat. Med. **23**, 159 (1952).
7. P. A. CAMPBELL, J. Amer. Med. Ass. **150**, 3 (1952).
8. H. DENZER, German Aviation Medicine, Vol. 1. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1950.
9. O. GAUER and H. HABER, German Aviation Medicine, Vol. 1. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1950.
10. S. GELFAN, L. F. NIMS and R. B. LIVINGSTON, Federation Proc. **6**, 110 (1947).
11. F. HABER and H. HABER, J. Aviat. Med. **21**, 395 (1950).
12. H. HABER and S. J. GERATHEWOHL, J. Aviat. Med. **22**, 180 (1951).
13. J. P. HENRY, E. R. BALLINGER, P. H. MAHER and D. G. SIMONS, J. Aviat. Med. **23**, 421 (1952).
14. H. KEILER, Luftfahrtmedizin (Berlin) **6**, 93 (1942).
15. U. C. LUFT, H. G. CLAMANN and E. OPITZ: J. Aviat. Med. **22**, 117 (1951).
16. W. LUTZ, Luftfahrtmedizin (Berlin) **7**, 84 (1943).
17. B. METZ, J. Aviat. Med. **22**, 152 (1951).
18. A. M. MAYO, See [25].
19. H. SCHAEFER, J. Aviat. Physiol. **22**, 375 (1950).
20. E. SAENGER, Gasgeschwindigkeiten bei sehr hohen Fluggeschwindigkeiten. Dtsch. Luftfahrt-Forsch. Bericht 972, Berlin 1938.
21. W. T. SHILLING and R. S. RICHARDSON, Astronomy. New York: Henry Holt & Co., 1947.
22. H. STRUGHOLD, H. HABER, K. J. K. BUETTNER and F. HABER, J. Aviat. Med. **22**, 342 (1951).
23. H. STRUGHOLD, J. Aviat. Med. **22**, 315 (1952).
24. H. M. SWEENEY, Explosive Decompression. Air Surg. Bull. (Wash.) **10** 1 (1944).
25. C. S. WHITE and O. O. BENSON, Jr., Editors, Physics and Medicine of the Upper Atmosphere. Albuquerque: University of New Mexico Press, 1952.

Vol.
1
1955

Optimal Programming of Rocket Thrust Direction¹

By

D. F. Lawden, Birmingham², BIS

(With 3 Figures)

Abstract. The programming of the variation in the magnitude of the thrust of a rocket being supposed fixed by the design of the power unit, the problem is considered of programming the thrust direction to achieve maximum energy increment in the payload over a given period of time. Equations, from which the optimal trajectory may be computed, are derived for the general case of a rocket moving in a specified gravitational field and subject also to atmospheric resistance. These equations are solved for the case of a rocket moving in vacuo in a uniform field. It is deduced that it is advantageous to displace the line of thrust from the direction of motion by a small angle in the sense of the field and steadily to diminish this angle to zero as the manoeuvre proceeds. This conclusion is tested by considering various methods of escape from a circular orbit, employing a thrust which yields a constant acceleration.

Zusammenfassung. Unter der Annahme, daß die Größenänderung des Schubes einer Rakete durch die Konstruktion des Triebwerkes bestimmt wird, wird das Problem der Vorausberechnung der Schubrichtung betrachtet, um die maximale Energiezunahme der Nutzlast während eines gegebenen Zeitraumes zu erreichen. Gleichungen, aus denen die günstigste Bahn berechnet werden kann, werden für den allgemeinen Fall abgeleitet, daß eine Rakete sich in einem ganz bestimmten Schwerefeld bewegt und auch dem atmosphärischen Widerstand unterworfen ist. Diese Gleichungen werden für den Fall der Bewegung einer Rakete im Vakuum in einem einheitlichen Feld gelöst.

Es ergibt sich, daß es vorteilhaft ist, die Richtung des Schubes gegen die Bewegungsrichtung um einen kleinen Winkel im Sinne des Feldes zu verschieben und diesen Winkel stetig bis Null zu vermindern, wenn das Fahrtmanöver fortschreitet. Diese Schlußfolgerung wird durch die Betrachtung verschiedener Methoden zum Verlassen einer Kreisbahn geprüft, wobei ein Schub benutzt wird, der konstante Beschleunigung liefert.

Résumé. En supposant que la variation de la poussée d'une fusée dépende de sa construction, le problème se pose de faire varier l'angle de la poussée par rapport à la tangente à la trajectoire afin de réaliser un accroissement maximum de l'énergie de la charge utile pendant un intervalle de temps donné. On établit des équations pour le cas général d'une fusée volant dans un champ déterminé de gravité et sujette à la traînée, d'où la trajectoire optimum peut être déduite. Les équations sont résolues pour le cas d'une fusée volant dans le vide et dans un champ uniforme de gravité. On en déduit qu'il est avantageux de dévier la direction de la poussée de la direction du mouvement suivant un petit angle dans le sens du champ de gravité et de diminuer constamment cet angle jusqu'à zéro dans la suite de l'opération. Cette conclusion est vérifiée en considérant différentes méthodes de quitter une orbite circulaire en utilisant une poussée causant une accélération constante.

¹ This paper was presented at the Fifth I.A.F.-Congress at Innsbruck, August 6, 1954.

² Department of Physics and Mathematics, College of Technology, Birmingham 1, England.

1. Introduction

A complete theoretical solution to the problem of transferring a rocket between two points of space by consumption of the minimum quantity of fuel, has been given by the author in previous papers [1, 2]. It is there shown that an optimal trajectory can only be followed in vacuo by the application of certain impulsive thrusts from the motor, the rocket coasting freely under gravity during the intervals between such thrusts. If the rocket is also subject to atmospheric resistive forces, sections of the optimal trajectory may be described under a finite motor thrust, but impulsive thrusts are not generally absent. Employing a conventional motor, the periods of thrust will be so short compared with the time of transit between the two terminal points, that the thrusts may be regarded as close approximations to the theoretical optimal thrusts. If, however, a micro-thrust motor is to be utilised to escape from a circular orbit about one body and later to place the rocket in an orbit about a second body, as has been suggested by some writers [3, 4], no approximation to the theoretical optimal trajectory is possible, and minimisation of the fuel expenditure must be carried out under the explicitly recognised condition that the thrust is not to exceed a certain value.

The assimilation of this extra condition into our theory does not appear to be a simple matter. It is clear that, under these circumstances, an optimal trajectory must be constructed from

- (a) arcs of null thrust,
- (b) arcs of finite thrust governed by the equations of the original theory,
- (c) arcs of maximum thrust.

For, an arc of null thrust is clearly a minimal arc under all circumstances, in the sense that any neighbouring trajectory can only be followed by actual expenditure of fuel. Any arc of finite thrust which is offered by the equations of the unmodified theory and which does not violate the extra condition of limited thrust, is also an optimal arc for the same reasons which prove it to be one when this extra requirement is waived. Any other arc C of finite thrust, which does not call for the maximum permissible thrust from the motors, cannot result in an optimal arc, for it certainly is not such an arc when the thrust is unlimited and hence neighbouring trajectories exist over which the fuel consumption is smaller. These neighbouring trajectories can be followed by small adjustments to the motor thrust programme and these adjustments will always be possible, even when we are employing a motor of limited thrust, providing this motor was not operating at maximum thrust over the arc C . The only other possible type of optimal arc is therefore one which can only be followed by exerting maximum thrust.

So much is straightforward. The conditions to be satisfied at the junctions between arcs of different types and the equations to be satisfied by the direction cosines of the direction of the thrust over the arcs of maximum thrust are, however, much more difficult to calculate. The present paper offers a partial solution to this latter problem. Suppose that the fuel consumption programme is predetermined, so that the magnitude of the thrust is known at any time after the motors commence functioning. In particular, this programme may provide maximum thrust at all times. The mode of directing the thrust, which leads to maximum total energy (kinetic and potential) being acquired by the rocket during a given period of time, will then be calculated. The solution so obtained will be particularly useful when it is required to calculate the optimal trajectory of escape from an orbit about a centre of attraction for a rocket of limited thrust.

Vol.
1
1955

Assuming that the motor is to function continuously, it is clear from what has been said above that the thrust must be maintained at its maximum value, until the energy of the vehicle has been raised to the escape level (or beyond, if a non-zero velocity at infinity is a requirement). By following the optimal track calculated according to the method of this paper, this energy requirement will be satisfied at the earliest possible moment and hence the fuel expenditure will be minimised.

TSIEN has made a preliminary study of the problem of escape from a circular orbit, employing rockets of limited thrust [5]. His methods are approximate and are restricted to the cases when the thrust per unit mass f is constant and is directed either (a) along the radius joining the rocket to the centre of attraction, or (b) along a direction at right angles to this radius. He concludes that the latter mode of programming the thrust direction is very much more economical than the former and that, in this case, a reduction in f from the value g to 0.001 g results in a doubling of the characteristic velocity. An elementary explanation of why the first conclusion was to have been expected will now be given.

Let v denote the velocity of a rocket at time t and let Φ denote the potential function of the gravitational field in which it is moving. If c is the exhaust velocity relative to the rocket and M the rocket's mass at time t , the equation of motion is

$$\frac{dv}{dt} + \text{grad } \Phi = \frac{c}{M} \frac{dM}{dt}. \quad (1)$$

Taking the scalar product of both sides of this equation with v and putting $w = \log M$, we obtain

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + v \frac{\partial \Phi}{\partial s} = v \cdot c \frac{dw}{dt}, \quad (2)$$

s representing the arc length parameter for the trajectory in question, so that $\partial \Phi / \partial s$ denotes the derivative of Φ in the direction of motion. Now $v = ds/dt$ and hence $v \partial \Phi / \partial s = d\Phi / dt$ and equation (2) is equivalent to

$$\frac{dE}{dt} = v \cdot c \frac{dw}{dt}, \quad (3)$$

where $E = 1/2 v^2 + \Phi$ and is the total energy per unit mass of the rocket. Equation (3) implies that

$$\frac{dE}{dw} = v \cdot c, \quad (4)$$

proving that, at any instant, the rate of increase of E with respect to w (and hence M) is made as large as possible by aligning c with v , i. e. by aligning the direction of thrust with the tangent to the trajectory. If, therefore, the programming of fuel expenditure is predetermined, by adopting a thrust direction programme which ensures that this direction is always tangential to the trajectory, we shall also ensure that the rate of increase of E is maintained at its maximum value at every instant. Since the object of an escape manoeuvre is to raise E , as rapidly as possible, through negative values to the value zero (or beyond), such a programme will be an economical one. This explains why TSIEN's second programme (b) is more economical than his first (a), for, as a rocket spirals outwards from a circular orbit, the tangent to its trajectory will rarely differ in direction from that of the perpendicular to the central radius by more than a

few degrees, and, if the thrust is maintained in the direction of this perpendicular, the condition we have just obtained will be approximately satisfied at all times.

The above analysis suggests an approximate solution to the problem of this paper, but, unfortunately, does not give the absolute optimal solution. For, it may be advantageous, during the early period of the thrust, purposely to direct the thrust out of alignment with the tangent to the trajectory, with the object of acquiring a high velocity in the early stages of the manoeuvre, so that, in the later stages, when thrust and tangent are made coincident, v takes a larger value than might otherwise have been the case and hence, by equation (4), the rate of increase of E is augmented. This augmentation may be so pronounced, that it more than makes up for the reduction in the rate of increase of E accepted in the early stages. The later theory will establish the validity of this argument. However, an earlier paper [6], concerned with escape from a circular orbit employing impulsive thrusts, has revealed that, under certain circumstances, it is not economical to maintain the rate of increase of E at its highest value over the entire trajectory of escape. In fact, if it is required to escape from a circular orbit so as to arrive at infinity with a velocity in excess of a certain value, it is advantageous first to direct the thrust so as to oppose the motion. E then decreases initially and the rocket drifts in towards the centre of attraction along an elliptical arc. At its point of closest approach, the motors thrust in the direction of motion and, since the velocity is now large, E increases at a rapid rate and the rocket is transferred into a hyperbolic orbit along which it coasts to infinity. The overall fuel consumption is found to be less than would have been the case if escape had been achieved by application of a single tangential thrust in the circular orbit.

Vol.
1
1955

2. The General Theory

Let Ox_1, Ox_2, Ox_3 be rectangular cartesian axes which, are either fixed, or being translated uniformly without rotation (i. e. an inertial frame). Let $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ be the potential function of the gravitational field in which the axes are immersed. Let $x_i (i = 1, 2, 3)$ ¹ be the coordinates of a rocket at time t . If c is the exhaust velocity and M the mass of the rocket, the acceleration caused by the rocket thrust is $-c dM/M dt$. Denoting this quantity by f and the direction cosines of the thrust by l_i , the components of the rocket acceleration due to the motor thrust are fl_i . We shall suppose that, in addition to the gravitational and motor thrust forces, the rocket is subject to resistive forces exerted by the medium through which it is moving. These forces will contribute to the resultant acceleration of the rocket and we shall denote the components of their contribution by $-F_i$. In general, the values of the F_i will depend upon the time, the position in space of the rocket, its velocity, its mass and its aspect, i. e. its orientation relative to its direction of motion. We shall assume that the direction of the axis of the rocket is parallel to the line of thrust and hence, that the aspect is calculable when the l_i and \dot{x}_i are known. We have, therefore,

$$F_i = F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, l_1, l_2, l_3, M, t). \quad (5)$$

The equations of motion of the rocket can now be written down thus

¹ From this point onwards, it will be understood that a suffix such as i is to range over a set of integral values 1, 2, 3 or 1, 2, 3, 4, 5, 6, as will be sufficiently indicated by the context.

$$\ddot{x}_i + F_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = f l_i . \quad (6)$$

We shall regard $f = f(t)$ as a given function, i. e. the mode of fuel expenditure is predetermined. The functions $l_i = l_i(t)$, determining the programming of thrust direction, must satisfy the identity

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad (7)$$

but are otherwise open to choice. We shall suppose them to be so selected that the total energy per unit mass E , defined by the equation

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \Phi, \quad (8)$$

is subject to the largest possible increment during the interval from $t = 0$ to $t = T$. The position and velocity of the rocket at $t = 0$ will be supposed given.

If $E = E_0$ at $t = 0$ and $E = E_1$ at $t = T$, then E_0 is a given quantity and the $l_i(t)$ must be selected so that E_1 is maximised. Suppose $l_i = l_i(t)$ result in the trajectory $x_i = x_i(t)$ and that E_1 is thereby maximised. Let $l_i = l_i(t) + \delta l_i(t)$ result in a neighbouring trajectory $x_i = x_i(t) + \delta x_i(t)$ for which $E = E_1 + \delta E_1$ at $t = T$. Since E_1 is a maximum value, it is also a stationary value relative to the small variations δl_i of the thrust direction programme and hence, to the first order of small quantities, $\delta E_1 = 0$ for all possible small variations δl_i . However, only two of the functions δl_i are independent, for, if we differentiate equation (7), we obtain the condition

$$l_1 \delta l_1 + l_2 \delta l_2 + l_3 \delta l_3 = 0. \quad (9)$$

The first variation of the equations of motion (6) is

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j \\ = f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_i} \delta l_j, \end{aligned} \quad (10)$$

the summation convention of the tensor calculus, according to which the repetition of a suffix implies that a summation is to be carried out with respect to this suffix, being operative. This convention is assumed throughout the following argument.

We shall solve the equations (10) for the functions δx_i by the method of variation of parameters [7, 8]. Consider the system of homogeneous equations in the y_j ($j = 1, 2, 3$)

$$\ddot{y}_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} y_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \dot{y}_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} y_j = 0 \quad (11)$$

derived from the equations (10). These are equivalent to the six first order equations

$$\begin{aligned} \dot{z}_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} y_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} z_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} y_j = 0 \\ \dot{y}_i = z_i, \end{aligned} \quad (12)$$

in the six unknowns y_i, z_i . Let $y_i = y_{ik}, z_i = z_{ik}$, ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) represent a fundamental set of six solutions of these homogeneous equations.

The equations (10) are equivalent to the six first order equations

$$\begin{aligned}\delta\dot{\phi}_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{\phi}_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j &= f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \\ \delta \dot{x}_i &= \delta \dot{\phi}_i,\end{aligned}\quad (13)$$

in the six unknowns δx_i , $\delta \dot{\phi}_i$. To solve this system of equations, we introduce new dependent variables X_k ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) according to the transformation equations

$$\delta x_i = y_{ik} X_k, \quad \delta \dot{\phi}_i = z_{ik} X_k. \quad (14)$$

Substituting in the system (13), and remembering that the y_{ik} and z_{ik} are solutions of the system (12), we obtain

$$\begin{aligned}z_{ik} \dot{X}_k &= f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j, \\ y_{ik} \dot{X}_k &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Solving for the \dot{X}_k , we find that

$$\dot{X}_k = \frac{A_{ik}}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) \quad (16)$$

where A is the determinant of the sixth order $|a_{ij}|$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), such that

$$a_{ij} = z_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

$$= y_{i-3,j} \quad (i = 4, 5, 6) \quad (18)$$

and A_{ik} is the cofactor of the element a_{ik} .

When $t = 0$, $\delta x_i = 0$, $\delta \dot{x}_i = \delta \dot{\phi}_i = 0$ since the initial position and velocity of the rocket are fixed and, accordingly, are not subject to any variation. By equations (14), therefore, $X_k = 0$ at $t = 0$ for $k = 1, 2, \dots, 6$. Integrating the equations (16) under these initial conditions, we obtain

$$X_k = \int_0^t \frac{A_{ik}}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds \quad (19)$$

and hence, substituting in equations (14),

$$\delta x_r = \int_0^t y_{rk}(t) \frac{A_{ik}}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds \quad (20)$$

$$\delta \dot{x}_r = \delta \dot{\phi}_r = \int_0^t z_{rk}(t) \frac{A_{ik}}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds,$$

where, unless indicated otherwise, the quantities in the integrands are to be regarded as functions of an argument s .

Now, $y_{rk}(t) A_{ik}$ is equal to the determinant which we can form from A by replacing its i th row by the row of elements $y_{r1}(t)$, $y_{r2}(t)$, ..., $y_{r6}(t)$. We shall denote this determinant by $a_{ri}(t, s)$. Similarly $z_{rk}(t) A_{ik}$ is the determinant obtained from A by replacing its i th row by the row of elements $z_{r1}(t)$, $z_{r2}(t)$, ..., $z_{r6}(t)$. We shall denote this by $\beta_{ri}(t, s)$. Equations (20) may then be written

$$\delta x_r = \int_0^t \frac{a_{ri}(t, s)}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds$$

VOL
1
195

$$\delta \dot{x}_r = \int_0^t \frac{\beta_{ri}(t, s)}{A} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds. \quad (21)$$

Taking the first variation of equation (8),

$$\delta E = \dot{x}_r \delta \dot{x}_r + \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \delta x_r \quad (22)$$

and hence, substituting from equations (21),

$$\delta E = \int_0^t \frac{1}{A} \left\{ \dot{x}_r(t) \beta_{ri}(t, s) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}(t) a_{ri}(t, s) \right\} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds. \quad (23)$$

When $t = T$, $\delta E = 0$ for arbitrary functions δl_i satisfying the equation (9). Hence

$$\int_0^T \frac{1}{A} \left\{ \dot{x}_r(T) \beta_{ri}(T, s) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}(T) a_{ri}(T, s) \right\} \left(f \delta l_i - \frac{\partial F_i}{\partial l_j} \delta l_j \right) ds = 0 \quad (24)$$

for arbitrary functions δl_i . Changing the variable of integration in equation (24) from s to t , this equation may be written in the form

$$\int_0^T (P_1 \delta l_1 + P_2 \delta l_2 + P_3 \delta l_3) dt = 0 \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned} P_j &= P_j(T, t) = \frac{f(t)}{A(t)} \left\{ \dot{x}_r(T) \beta_{rj}(T, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}(T) a_{rj}(T, t) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{A(t)} \left\{ \dot{x}_r(T) \beta_{ri}(T, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}(T) a_{ri}(T, t) \right\} \frac{\partial F_i}{\partial l_j}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Equation (25) is true for arbitrary functions δl_i satisfying equation (9), only if

$$P_1 : P_2 : P_3 = l_1 : l_2 : l_3, \quad (27)$$

and this is the condition which must be satisfied by the thrust direction at all points along the trajectory if the latter is to be optimal.

In particular, when $t = T$, $a_{ri}(T, t) = 0$, since two of its rows are then identical. Also for this value of t , $\beta_{ri}(T, t) = 0$ if $r \neq i$, for then, two rows are identical and $\beta_{ri}(T, t) = A(T)$ if $r = i$. From equation (26), we may therefore conclude that

$$P_j(T, T) = f(T) \dot{x}_j(T) - \dot{x}_i(T) \frac{\partial F_i}{\partial l_j}(T). \quad (28)$$

From equations (27) and (28), the direction of thrust at $t = T$ is calculable. In particular, if resistive forces are absent, so that $F_i = 0$,

$$l_1 : l_2 : l_3 = \dot{x}_1(T) : \dot{x}_2(T) : \dot{x}_3(T) \quad (29)$$

and the direction of the thrust is tangential to the trajectory at $t = T$.

The optimal trajectory is determined by the equations (6), (7), (26) and (27). In general, these equations can only be solved by numerical methods and, since T occurs explicitly in equations (26), it is necessary to assume a knowledge of the conditions at $t = T$ and to integrate backwards from this instant. Eventually, we shall arrive at the instant $t = 0$ and, if the conditions calculated for this

instant are not satisfactory initial conditions, adjustment of the conditions assumed at $t = T$ must be made until satisfaction is obtained. The fundamental set of solutions of the homogeneous equations (12), will also have to be derived by step-by-step integration at the same time as the main integration is proceeding and hence this integration must also proceed backwards from $t = T$. If we perform this latter integration starting with values at $t = T$ given by

$$y_{ik} = \delta_{ik}, \quad z_{ik} = \delta_{i+3,k}, \quad (30)$$

where $\delta_{ik} = 1$ if $i = k$ and is zero otherwise, a fundamental set will result.

The calculation of an optimal trajectory of maximum energy increment has therefore been shown to be theoretically possible. It is clear, however, that in practice, unless an analytic solution of the equations can be found for the circumstances under consideration, the work involved will be heavy. Some simplification will result if it can be assumed that the trajectory is two dimensional and further simplification if resistive forces are absent. In general, however, it may be expected that the assistance of an electronic computer will be required.

Vol
1
195

3. Optimal Trajectories in a Uniform Field

In this Section, we shall exemplify the general theory of the previous Section by applying it to the case when resistive forces are absent, the gravitational field is uniform and the thrust is such as to maintain a constant acceleration of the rocket in the absence of all other forces. The motion will also be supposed to take place in a plane.

We take axes Ox_1, Ox_2 in the plane of motion, Ox_1 being horizontal and Ox_2 vertically upwards. Motion is assumed to commence from the origin at $t = 0$ with velocity components (u_1, u_2) and to terminate at the point (X_1, X_2) with velocity components (U_1, U_2) at $t = T$. The acceleration due to gravity is g and hence $\Phi = g x_2$. The direction cosines of the thrust are (l_1, l_2) and the steady acceleration component of the rocket due to the thrust is f . If M is the mass of the rocket at time t and c is its exhaust velocity

$$\frac{c}{M} \frac{dM}{dt} = -f \quad (31)$$

and hence the mass ratio R for the manoeuvre is given by

$$R = e^{fT/c}. \quad (32)$$

The equations of motion (6) take the form

$$\ddot{x}_1 = f l_1, \quad \ddot{x}_2 + g = f l_2. \quad (33)$$

The homogeneous equations (12) are now only four in number and have the form

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad \dot{y}_1 = z_1, \quad \dot{y}_2 = z_2. \quad (34)$$

The conditions (30), to be satisfied at $t = T$ by a fundamental set of four solutions of these equations, are

- | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| (a) | $y_{11} = 1,$ | $y_{21} = 0,$ | $z_{11} = 0,$ | $z_{21} = 0,$ |
| (b) | $y_{12} = 0,$ | $y_{22} = 1,$ | $z_{12} = 0,$ | $z_{22} = 0,$ |
| (c) | $y_{13} = 0,$ | $y_{23} = 0,$ | $z_{13} = 1,$ | $z_{23} = 0,$ |
| (d) | $y_{14} = 0,$ | $y_{24} = 0,$ | $z_{14} = 0,$ | $z_{24} = 1,$ |
- (35)

and the fundamental set corresponding to these conditions are:

- (a) $y_{11} = 1, \quad y_{21} = 0, \quad z_{11} = 0, \quad z_{21} = 0,$
 (b) $y_{12} = 0, \quad y_{22} = 1, \quad z_{12} = 0, \quad z_{22} = 0,$
 (c) $y_{13} = t - T, \quad y_{23} = 0, \quad z_{13} = 1, \quad z_{23} = 0,$
 (d) $y_{14} = 0, \quad y_{24} = t - T, \quad z_{14} = 0, \quad z_{24} = 1.$

Regarding s as the argument of A , the latter quantity is then the determinant

$$A(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & s-T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s-T \end{vmatrix} = 1. \quad (37)$$

It now follows that

$$a_{11}(t, s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & s-T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s-T \end{vmatrix} = t-s$$

and hence

$$a_{11}(T, t) = T-t. \quad (38)$$

Similarly

$$\begin{aligned} a_{12}(T, t) &= 0 \\ a_{21}(T, t) &= 0 \\ a_{22}(T, t) &= T-t \end{aligned} \quad (39)$$

and

$$\begin{aligned} \beta_{11}(T, t) &= 1, \quad \beta_{12}(T, t) = 0, \\ \beta_{21}(T, t) &= 0, \quad \beta_{22}(T, t) = 1. \end{aligned} \quad (40)$$

We can now write down equations (26), viz.,

$$P_1 = f U_1, \quad P_2 = f \{U_2 + g(T-t)\}, \quad (41)$$

and then, equations (7) and (27) together imply that

$$l_1 = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2}}, \quad l_2 = \frac{U_2 + g(T-t)}{\sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2}}. \quad (42)$$

Substituting in equations (33), we obtain the equations of the optimal trajectory in the form

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{f U_1}{\sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2}}, \\ \ddot{x}_2 + g &= \frac{f \{U_2 + g(T-t)\}}{\sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Integrating these equations once under the conditions $\dot{x}_1 = U_1, \dot{x}_2 = U_2$ at $t = T$, we calculate that

$$\dot{x}_1 = U_1 \left[1 + \frac{f}{g} \left\{ \sinh^{-1} \frac{U_2}{U_1} - \sinh^{-1} \frac{U_2 + g(T-t)}{U_1} \right\} \right], \quad (44)$$

$$\dot{x}_2 = U_2 + g(T-t) + \frac{f}{g} \left[\sqrt{U_1^2 + U_2^2} - \sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2} \right].$$

Putting $t = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \left[1 + \frac{f}{g} \left\{ \sinh^{-1} \frac{U_2}{U_1} - \sinh^{-1} \frac{U_2 + gT}{U_1} \right\} \right], \\ u_2 &= U_2 + gT + \frac{f}{g} \left[\sqrt{U_1^2 + U_2^2} - \sqrt{U_1^2 + (U_2 + gT)^2} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

These equations determine U_1 and U_2 in terms of u_1 and u_2 .

Integrating equations (44) under the initial conditions $x_1 = x_2 = 0$ at $t = 0$, we obtain the equations from which the optimal trajectory may be plotted, viz.:

$$\begin{aligned} x_1 &= U_1 t \left(1 + \frac{f}{g} \sinh^{-1} \frac{U_2}{U_1} \right) + \frac{U_1 f}{g^2} \left[\{U_2 + g(T-t)\} \sinh^{-1} \frac{U_2 + g(T-t)}{U_1} \right. \\ &\quad \left. - (U_2 + gT) \sinh^{-1} \frac{U_2 + gT}{U_1} - \sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{U_1^2 + (U_2 + gT)^2} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= U_2 t + \frac{1}{2} g T^2 - \frac{1}{2} g (T-t)^2 + \frac{f t}{g} \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \\ &\quad + \frac{f}{2g^2} \left[U_1^2 \left\{ \sinh^{-1} \frac{U_2 + g(T-t)}{U_1} - \sinh^{-1} \frac{U_2 + gT}{U_1} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{U_2 + g(T-t)\} \sqrt{U_1^2 + \{U_2 + g(T-t)\}^2} \right. \\ &\quad \left. - (U_2 + gT) \sqrt{U_1^2 + (U_2 + gT)^2} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

As a particular case, we will take $f = g$, $u_1 = 7.900 \times 10^5$ cm/sec, $u_2 = 0$. These data correspond to a rocket which is initially in horizontal motion. The velocity of this motion has been selected to correspond to that which would be possessed by a rocket launched from an artificial satellite moving in a circular orbit situated just beyond the limits of the earth's atmosphere. The resulting

trajectory will therefore approximate the optimum by which escape may be effected from such an orbit, neglecting the convergence of the earth's field. Estimating 333 secs as the thrust duration which will permit the rocket to achieve escape velocity, we take T to have this value. Solving equations (45) numerically for U_1 and U_2 , we find that

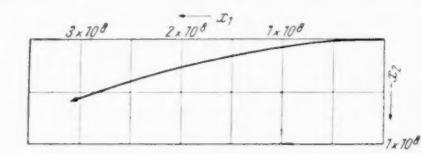


Fig. 1.

$U_1 = 11.09 \times 10^5$ cm/sec, $U_2 = -3.920 \times 10^5$ cm/sec, corresponding to a terminal velocity of 11.77×10^5 cm/sec. Escape velocity at the earth's surface is 11.19×10^5 cm/sec.

Substituting in equations (46) and (47), we can now graph the optimal trajectory. This is shown in Fig. 1. If ψ is the angle made by the direction of motion at any instant with the x_1 -axis, then $\tan \psi = \dot{x}_2 / \dot{x}_1$. Values of ψ for a number of values of t are given in Table I below and are there compared with corresponding values of φ , the angle made by the direction of thrust with the horizontal. From equations (42), we deduce that

$$\tan \varphi = \frac{U_2 + g(T-t)}{U_1}, \quad (48)$$

from which formula φ has been calculated.

Inspection of Table I reveals that the direction of thrust is at first thrown off from the trajectory tangent by an angle of over 3° in the direction of gravity, but that, as the motion proceeds, this lack of alignment is steadily eliminated, the directions of thrust and motion being coincident at the instant the power is switched off.

Vol. 1
1955

Table I

t	ψ	φ	$\psi - \varphi$
0	0°	-3.4°	3.4°
0.2 T	-4.8°	-6.7°	1.9°
0.4 T	-9.0°	-10.0°	1.0°
0.6 T	-12.8°	-13.3°	0.5°
0.8 T	-16.3°	-16.4°	0.1°
T	-19.5°	-19.5°	0°

In Reference [9], we obtained the equations of motion of a rocket moving in a uniform field and subjected to a thrust of the form assumed in this section, but whose direction was supposed to be maintained tangential to the trajectory. Assuming initial conditions identical with those stated above and a thrust of the same magnitude, we may calculate from the equations of this earlier paper the total energy per unit mass E achieved by a rocket propelled by a tangential thrust for 333 secs. We find that $E = 6.304 \times 10^{11}$ ergs/gm. The result when an optimum programme is followed proves to be $E = 6.307 \times 10^{11}$ ergs/gm.

Tangential thrust therefore results in an energy increment which is close to the maximum possible. It will be shown in the next section that, when smaller thrusts are employed to achieve escape, a tangential thrust programme does not compare so favourably with the optimum. However, as a first approximation to the optimum programme, tangential thrust may be expected to be very satisfactory in most cases.

4. Escape from a Circular Orbit

The results derived in the last section indicate that, if a rocket is to escape from a circular orbit about a centre of attraction employing a motor whose thrust at any time after the commencement of the manoeuvre is fixed, fuel will be economised if the thrust direction is maintained tangential to the trajectory. Even greater economy is to be expected, if the direction of thrust is thrown off from the tangent direction towards the centre of attraction, by an amount which steadily decreases towards zero as the manoeuvre progresses. The optimal degree of 'throw-off' at each moment can only be estimated accurately by solving numerically the equations of Section 2. If, however, we assume that the angle of 'throw-off' decreases linearly with the time from some assumed initial value to zero at the conclusion of the manoeuvre, by adjustment of this initial value, we may hope to get very close to the optimal trajectory, without the necessity of solving the complex equations governing this track. In this section, we shall explain how such a calculation may be carried out and will compare a track so computed, with tracks followed under conditions of tangential thrust and transverse thrust (as assumed by TSIEN [5]).

(r, θ) (Fig. 2) are polar coordinates of a rocket P, moving in the plane of the circular orbit, the centre O of this orbit being taken as pole. μ/r^2 is the attraction per unit mass on the rocket due to gravity. f is the acceleration due to the motor thrust and φ is the angle made by the direction of thrust with the perpendicular to OP in the sense indicated in the diagram. ψ is the angle made by the direction

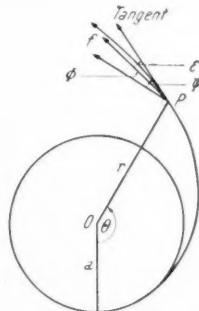


Fig. 2.
Read resp. φ, ψ, θ for Φ, Ψ, Θ .

of motion with this perpendicular and hence $\psi - \varphi = \varepsilon$ is the 'throw-off' angle. a is the radius of the circular orbit.

If E is the total energy per unit mass of the rocket at any instant, then

$$E = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) - \frac{\mu}{r}. \quad (49)$$

If \mathfrak{f} is the vector acceleration due to the thrust,

$$\mathfrak{f} = \epsilon \frac{dw}{dt} \quad (50)$$

and hence, equation (3) may be written

$$\dot{E} = \mathbf{v} \cdot \mathfrak{f} = \dot{r} f \sin \varphi + r \dot{\vartheta} f \cos \varphi. \quad (51)$$

Putting

$$h = r^2 \dot{\vartheta}, \quad (52)$$

the equation of motion resolved in the transverse direction (i. e. perpendicular to OP) is

$$\frac{\dot{h}}{r} = f \cos \varphi. \quad (53)$$

Eliminating $\dot{\vartheta}$ between equations (49) and (52), the former may be written

$$\dot{r} = \sqrt{2E + \frac{2\mu}{r} - \frac{h^2}{r^2}}. \quad (54)$$

Eliminating $\dot{\vartheta}$ from equation (51) in the same way and putting $\varphi = \psi - \varepsilon$, we obtain

$$\dot{E} = \dot{r} f \sin(\psi - \varepsilon) + \frac{h f}{r} \cos(\psi - \varepsilon), \quad (55)$$

and this, in view of equation (53), is equivalent to

$$\dot{E} = \dot{r} f \sin(\psi - \varepsilon) + \frac{h \dot{h}}{r^2}. \quad (56)$$

Equation (53) can also be written

$$\dot{h} = r f \cos(\psi - \varepsilon). \quad (57)$$

Equations (54), (56) and (57) are three first order differential equations for the quantities r , E and h . The angles ψ and ε , which occur in these equations, are calculable as follows. Firstly, we have

$$\tan \psi = \frac{\dot{r}}{r \dot{\vartheta}} = \frac{r \dot{r}}{h}. \quad (58)$$

Secondly, assuming ε decreases linearly from some initial value ε_0 to zero during the time T of the manoeuvre,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (59)$$

Equations (54), (56) and (57) are easily integrated numerically in any particular case, but, before commencing such an integration, it is desirable to compute a set of equations which are dimensionless. This we do by introducing new dependent variables ϱ , e , k according to the transformation equations

$$r = a \varrho, \quad E = \frac{\mu}{a} e, \quad h = \sqrt{\mu a} k, \quad (60)$$

and a new independent variable τ according to the equation

$$t = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} \tau. \quad (61)$$

Vol. 1
1955

Denoting differentiations with respect to τ by primes, equations (54), (56), (57), (58) and (59) now take the form

$$\begin{aligned}\varrho' &= \sqrt{2e + \frac{2}{\varrho} - \frac{k^2}{\varrho^2}}, \\ e' &= n\varrho' \sin(\psi - \varepsilon) + \frac{k k'}{\varrho^2}, \\ k' &= n\varrho \cos(\psi - \varepsilon), \\ \tan \psi &= \frac{\varrho \varrho'}{k}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right),\end{aligned}\quad (62)$$

where $n = a^2 f/\mu$ and $T = a^{3/2} \tau_1 / \mu^{1/2}$. n is the ratio of the acceleration due to the motor thrust to the acceleration due to gravity in the circular orbit.

Initially, the rocket is moving in the circular orbit and there $\varrho = 1$, $e = -1/2$, $k = 1$ and $\psi = 0$. These are the initial conditions under which the equations (62) have to be integrated.

Having integrated equations (62), the coordinate ϑ can be found by integration of equation (52), expressed in the form

$$\vartheta' = \frac{k}{\varrho^2}. \quad (63)$$

We have performed a numerical integration of these equations, taking $n = 0.1$ (i.e. a thrust of one tenth of gravity) and an initial 'throw-off' angle of 5° ($= \varepsilon_0$). The rocket will escape to infinity under its own momentum when $e = 0$ and, from past experience it was estimated that this value would be taken by e when $\tau = 5$. Accordingly, we took $\tau_1 = 5$. The results of the integration are given in Table II, and the trajectory has been plotted as Curve A in Fig. 3. By inverse interpolation in the table, we find that $e = 0$ when $\tau = 5.1130$.



Fig. 3.

Table II

τ	ϱ	ϑ	k	e
0.0	1.0000	$0^\circ 0'$	1.0000	-0.5000
0.4	1.0015	$23^\circ 21'$	1.0399	-0.4594
0.8	1.0144	$47^\circ 20'$	1.0801	-0.4173
1.2	1.0500	$71^\circ 7'$	1.1213	-0.3745
1.6	1.1145	$93^\circ 35'$	1.1643	-0.3318
2.0	1.2086	$113^\circ 51'$	1.2100	-0.2898
2.4	1.3290	$131^\circ 31'$	1.2590	-0.2490
2.8	1.4717	$146^\circ 35'$	1.3120	-0.2096
3.2	1.6326	$159^\circ 23'$	1.3691	-0.1715
3.6	1.8093	$170^\circ 15'$	1.4304	-0.1345
4.0	2.0001	$179^\circ 31'$	1.4959	-0.0983
4.4	2.2044	$187^\circ 29'$	1.5653	-0.0627
4.8	2.4216	$194^\circ 21'$	1.6385	-0.0275
5.2	2.6522	$200^\circ 21'$	1.7149	+0.0076

We will compare this result with the corresponding result (i) when the thrust acts in the transverse direction as assumed by TSIEN and (ii) when the thrust acts along the trajectory tangent.

In the first case, $\psi - \varepsilon = 0$ and the first three of equations (62) simplify to

$$\begin{aligned}\varrho' &= \sqrt{2e + \frac{2}{\varrho} - \frac{k^2}{\varrho^2}}, \\ e' &= \frac{k k'}{\varrho^2}, \\ k' &= n \varrho.\end{aligned}\quad (64)$$

Equations (64) have been integrated numerically with $n = 0.1$ as before. The results are set out in Table III and the trajectory plotted as Curve B in Fig. 3.

By inverse interpolation, we find that $e = 0$ when $\tau = 5.546$. Now f/T is the characteristic velocity of the manoeuvre and hence τ is a measure of this quantity. Our results reveal that using a transverse thrust, the characteristic velocity is increased by 8.5%.

In the case when the thrust acts along the tangent, equation (51) gives

$$\dot{E} = f v. \quad (65)$$

But v has transverse and radial components $r \dot{\vartheta}$ and \dot{r} respectively and hence

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}, \quad (66)$$

using equation (52). We now have

$$\dot{E} = f \sqrt{\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}}, \quad (67)$$

leading to the dimensionless form

$$e' = n \sqrt{\varrho'^2 + \frac{k^2}{\varrho^2}}. \quad (68)$$

Table III

τ	ϱ	ϑ	k	e
0.0	1.0000	0° 0'	1.0000	-0.5000
0.4	1.0021	23° 21'	1.0400	-0.4592
0.8	1.0168	47° 15'	1.0803	-0.4171
1.2	1.0539	70° 54'	1.1217	-0.3745
1.6	1.1184	93° 13'	1.1650	-0.3323
2.0	1.2099	113° 24'	1.2115	-0.2914
2.4	1.3247	131° 7'	1.2621	-0.2523
2.8	1.4580	146° 26'	1.3177	-0.2152
3.2	1.6058	159° 38'	1.3789	-0.1800
3.6	1.7651	171° 4'	1.4463	-0.1465
4.0	1.9340	181° 1'	1.5203	-0.1144
4.4	2.1112	189° 47'	1.6011	-0.0835
4.8	2.2962	197° 33'	1.6893	-0.0536
5.2	2.4886	204° 31'	1.7849	-0.0246
5.6	2.6882	210° 48'	1.8884	+0.0038

In this case $\varepsilon = 0$ and hence, from equation (57),

$$\dot{h} = r f \cos \psi. \quad (69)$$

Vol.
1
1955

But $r\dot{\vartheta} = v \cos \psi$ and hence

$$\dot{h} = \frac{fr^2\dot{\vartheta}}{v} = \frac{f^2 h}{E}, \quad (70)$$

using equations (52) and (65). The dimensionless form of equation (70) is

$$k' = \frac{n^2 \varrho \varrho'}{e'}. \quad (71)$$

The first of equations (62), together with equations (63), (68) and (71), form a system of first order equations for the variables ϱ , ϑ , k , e . Integrating these numerically with $n = 0.1$, we obtain the results given in Table IV. The trajectory is Curve C in Fig. 3. An inverse interpolation shows that $\tau = 5.135$ when $e = 0$. This shows that there has been an increase of 0.4% in the characteristic velocity beyond that required to achieve escape by the first manoeuvre. Although this first manoeuvre does not represent an absolute optimum, we may expect that there will be little to choose between a tangential thrust programme and an optimal programme.

5. Conclusions and Recommendations

From the results derived in this paper, we are entitled to draw the following conclusions:

(i) If the object of a rocket manoeuvre in vacuo is to ensure the largest possible energy increment, the direction of thrust should be thrown off from the direction of motion in the sense of the gravitational field and by an angle which will vary as the motion proceeds, but which will become zero at the termination of the manoeuvre.

Table IV

τ	ϱ	ϑ	k	e
0.0	1.0000	0° 0'	1.0000	-0.5000
0.4	1.0022	23° 21'	1.0400	-0.4592
0.8	1.0171	47° 16'	1.0803	-0.4171
1.2	1.0553	70° 52'	1.1215	-0.3743
1.6	1.1226	93° 4'	1.1644	-0.3317
2.0	1.2190	113° 1'	1.2098	-0.2899
2.4	1.3414	130° 21'	1.2586	-0.2494
2.8	1.4852	145° 9'	1.3111	-0.2102
3.2	1.6470	157° 43'	1.3676	-0.1724
3.6	1.8241	168° 23'	1.4284	-0.1356
4.0	2.0150	177° 29'	1.4934	-0.0996
4.4	2.2191	185° 19'	1.5625	-0.0642
4.8	2.4361	192° 6'	1.6354	-0.0292
5.2	2.6660	198° 0'	1.7121	+0.0057

(ii) A good approximation to the optimal programming of thrust direction referred to in (i), may be achieved by maintaining alignment between the directions of thrust and motion.

(iii) If it is desired to escape from a circular orbit, maintenance of the thrust in the transverse direction is not an economical programme compared either

with the optimal manoeuvre or with the one executed under conditions of tangential thrust.

(iv) A closer approximation to optimal conditions of escape from a circular orbit than is provided by tangential thrust, may be obtained by assuming a linear decrease with the time of the angle of 'throw-off'. The improvement will, however, be small.

In connection with the approximation to optimal escape from a circular orbit mentioned in (iv), further research is necessary to determine the best value to take for the initial angle of 'throw-off' ϵ_0 for any given value of n (the magnitude of the thrust expressed in units of gravitational acceleration in the orbit). Employing an optimal value of ϵ_0 , the characteristic velocity corresponding to an escape from the orbit should then be computed for a range of values of n (e. g. 0.0001 — 1.0). We will pursue these researches further in a later paper.

References

1. D. F. LAWDEN, Minimal Rocket Trajectories. *J. Amer. Rocket Soc.* **23**, 360 (1953).
2. D. F. LAWDEN, Stationary Rocket Trajectories. *Quart. J. Mech.* (to be published).
3. G. F. FORBES, The Trajectory of a Powered Rocket in Space. *J. Brit. Interplan. Soc.* **9**, 75 (1950).
4. L. SPITZER, Interplanetary Travel Between Satellite Orbits. *J. Brit. Interplan. Soc.* **10**, 249 (1951).
5. H. S. TSIEN, Take-Off from Satellite Orbit. *J. Amer. Rocket Soc.* **23**, 233 (1953).
6. D. F. LAWDEN, Escape to Infinity from Circular Orbits. *J. Brit. Interplan. Soc.* **12**, 68 (1953).
7. E. G. C. POOLE, Theory of Linear Differential Equations, Chap. I, 8—10. Oxford: 1936.
8. E. L. INCE, Ordinary Differential Equations, Chap. V., 122—3. London: Longmans, 1927.
9. D. F. LAWDEN, Initial Arc of the Trajectory of Departure. *J. Brit. Interplan. Soc.* **7**, 119 (1948).

Vol.
1
1955

Über den Nachweis von schweren Primären der kosmischen Strahlung mittels einer Farbstoffmethode

Von

J. Eugster, Bern¹, SAA

(Mit 4 Abbildungen)

(Eingelangt am 13. November 1954)

Zusammenfassung. Es ist hier erstmals der sichere Nachweis gelungen, daß große Ereignisse in Photoplatten, die durch die kosmische Strahlung verursacht sind, auch mit Farbstoff detektierbar (nachweisbar) werden. Es hat dies große praktische Bedeutung, da es für biologische Untersuchungen von nun an nicht mehr notwendig ist, mit Photoplatten zu arbeiten, deren Nachteil (bei längerer Dauer zwischen Exposition und Entwicklung) das sogenannte Fading, das Abblasen der Spur war.

Es wird in Zukunft möglich sein, an Hand dieser Methode die Wirkung der kosmischen Strahlung im lebenden Zellgewebe, ja sogar innerhalb einer einzigen Zelle z. B. als Kerntreffer zu studieren und dabei die *Latentzeiten*, die für alle Strahlungsschäden so charakteristisch sind, weitgehend zu berücksichtigen.

Abstract. It is successfully demonstrated, for the first time, that the big events in photographic plates, which are produced by cosmic radiation, can also be made detectable by means of dyes. This has the practical significance, that, henceforth, in biological research, it is no longer necessary to work with photographic plates, whose disadvantage lies in the so-called Fading, the gradual disappearance of the tracks resulting from long delays between exposure and development.

It will be possible in future, with this method, to study the effect of cosmic rays in living tissue, even inside a single cell, e. g., in a direct hit with the nucleus and, thereby, to take into consideration the latent-periods which are so characteristic of all radiation damage.

Résumé. On démontre ici pour la première fois que d'importants effets causés sur les plaques photographiques par les rayons cosmiques sont également détectables par des colorants. Cela a une grande signification pratique, car pour des recherches biologiques il ne sera plus nécessaire d'utiliser des plaques photographiques dont le désavantage (pour de grands intervalles entre l'exposition et le développement) était, ce qu'on appelle le "fading", c'est à dire la diminution des traces.

À l'avenir il sera possible, sur la base de cette méthode d'étudier l'effet des rayons cosmiques sur les cultures vivantes, même dans l'intérieur d'une seule cellule, par exemple pour une atteinte du noyau, et de tenir compte dans une grande mesure des durées latentes qui sont tellement caractéristiques pour tous les dommages imputables aux rayonnements.

Einleitend sei darauf hingewiesen, daß schon anlässlich des III. Internationalen Astronautischen Kongresses in Stuttgart 1952 (durch Vermittlung unseres unvergänglichen Dr. LOESER) eine Zusammenarbeit zwischen schweizerischen Forschern und der meteorologischen Organisation in USA eingeleitet wurde. Nach seinem tragischen Tode übernahm es dann besonders Dr. H. SCHAEFER von der Naval School of Aviation Medicine in Pensacola zusammen mit Maj. SIMONS in Holloman,

¹⁾ Universität Zürich.

in vorbildlicher Weise die Exposition von biologischen und chemischen Objekten zu besorgen.

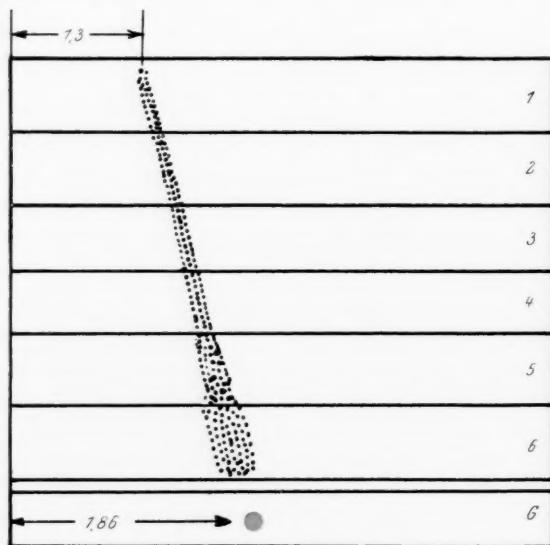


Abb. 1. Schematische Darstellung des Verlaufs der Spur eines Schweren Primären. Kombination von Plattenpaket 1 bis 6 mit Farbstoff-Gelatine G. Seitliche Aufnahme des Plattenpaketes. Zu unterst die Gelatineplatte G mit Farbstoffpunkt.

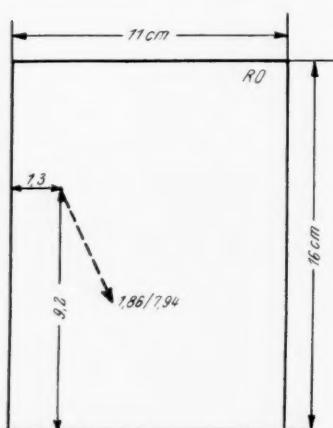


Abb. 2. Aufsicht. Blick auf oberste Platte 1. Die Spur verläuft von vorn oben links schräg nach hinten unten rechts. RO = Ecke rechts oben.

Jede reduzierende Strahlung, wie Ra, Röntgen, UV verursacht eine starke Rotfärbung des gelösten TTC, das vor der Exposition eine wasserklare Flüssigkeit

Für die kombinierten Versuche mit Nuclearphotoplatten, in denen gleichzeitig besonders präparierte Farbstoff-Gelatineplatten eingeordnet waren, fanden Expositionszeiten bis 68 Stunden in Höhen von 30 000 Metern statt.

In der vorliegenden Arbeit soll im besonderen über das Spezialproblem berichtet werden, das darin besteht, die Beziehung zwischen der photographischen und der Farbstoffmethode endgültig zu beweisen.

Herstellung der Farbstoff-Gelatine

Als Farbstoff wurde verwendet: das Triphenyltetrazoliumchlorid, abgekürzt TTC genannt. Es

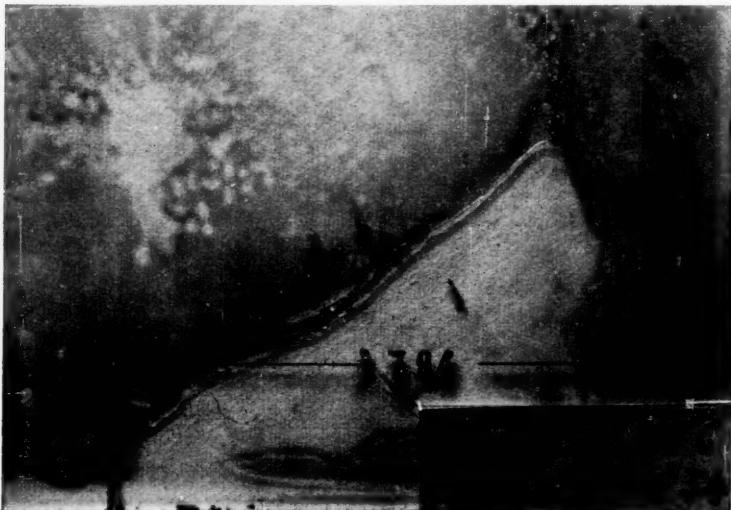
ist dies ein sogenannter Vitalfarbstoff, der bisher vorwiegend in der Agrikulturchemie zum Nachweis der Keimfähigkeit von Samenmaterial Anwendung fand. Im Hinblick auf biologische Versuche eignet sich dieser Farbstoff besonders deshalb hervorragend gut, weil er in geringer Konzentration der lebenden Zelle gegenüber vollständig unschädlich ist und weil ihn gute Wasserlöslichkeit auszeichnet. Der gewöhnlichen Gelatine wird er in flüssiger Form beigemischt bis zur Sättigungsgrenze (3% , entsprechend zirka 10^{-1} Mol). Auf Plexiglasplatten in der Größe der gebräuchlichen G5 Ilford Nuclearplatten (11×16 cm) ausgegossen, getrocknet und nachher durch eine zweite Plexiglasplatte überdeckt und vor Verletzung geschützt, ist das Präparat zur Exposition bereit.

Die Gelatine muß analog den Photoplatten im Dunkeln gehalten werden, da schon Tageslicht nach einer gewissen Zeit eine gelbliche Verfärbung hervorruft.

Vol.
1
1955

darstellt. Es war nun von besonderem Interesse, festzustellen, ob die kosmische Strahlung diesen Farbstoff ebenfalls zu reduzieren vermag.

Die Versuchsanordnung wurde so getroffen, daß ober- und unterhalb dieser Farbstoffplatte je ein Paket G5 Ilford Filme (without Support) derart befestigt



Vol.
1
955

Abb. 3. Farbstoffpunkt in Gelatineplatte.

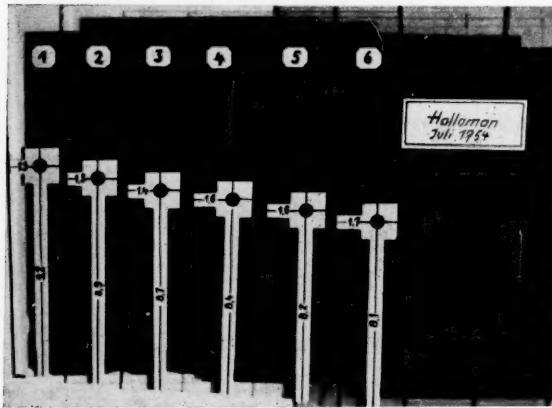


Abb. 4. Einzelpuren, in Kreisfeldern befindlich.

wurde, daß die üblichen Röntgenmarken am Rande der Platten genau den Orientierungsmarken der Farbstoffplatte entsprachen, so daß jedes physikalische Ereignis in den Nuclearplatten auch auf der Gelatineplatte genauestens lokalisiert werden konnte (Abb. 1 bis 3).

Die Auswertung der Photoplatten zeigte eine außerordentliche Reichhaltigkeit von schweren Primären, die sich in der beigefügten Farbstoff-Gelatine als kleine und kleinste, zum Teil nur mit Lupe feststellbare rote Punkte manifestierte. Der große Treffer in Abb. 3 wurde nun in Beziehung zu den Ergebnissen in den sechs darüberliegenden G5-Platten genau analysiert. Die stärkste Spur im ganzen Paket beginnt in Platte 1 am Rande. Diese Spur läßt sich von Platte zu Platte verfolgen (Abb. 1 und 4), da das primäre Teilchen das gesamte Plattenpaket vollständig durchsetzt und zuletzt auch die Gelatineplatte getroffen hat. Hier ist in der Fortsetzung der Gesamtspur ein vom Auge gut sichtbarer runder Rotfleck von zirka $1\frac{1}{2}$ mm Durchmesser feststellbar. Als Beweis dafür, daß dieser Rotfleck durch das Primärteilchen produziert sein muß, sind die Maße der dreidimensionalen Koordinaten beigefügt (Tab. I).

Tabelle 1

Platten Nr.	Koordinate X	Koordinate Y
1	1,25	9,2
2	1,3	8,9
3	1,4	8,7
4	1,6	8,4
5	1,6	8,2
6	1,7	8,1
Gelatine-Platte	1,86	7,94

← Plattenboden

Die Koordinatenmaße ergeben eine stetige Zunahme der Horizontalkomponente von der Platte 1 nach Platte 6. Umgekehrt nimmt die Vertikalkomponente von oben nach unten ab. Der Verlauf der Spur hat somit die Richtung von vorn oben links nach hinten unten rechts, wenn wir von oben auf das Plattenpaket schauen (s. Abb. 2).

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, den Kollegen H. SCHAEFER in Pensacola und Herrn Maj. SIMONS für die Liebenswürdigkeit zu danken, die sie uns bei der so ergebnisreichen Zusammenarbeit schenkten.

Vol.
1
1955

Abstract. The astrophysical theory of stationary nuclear reactions in stars is applied to the conditions that would be met in practical engineering cases which would be distinguished from the former particularly with respect to the much lower combustion pressures, dimensions of the reacting volume and burn-up times.

This application yields maximum rates of heat production per unit volume of reacting gas, occurring at about 10^8 °K in the cases of reactions between the hydrogen isotopes, but higher for heavier atoms. For the former, with chamber pressures of the order of 100 atm., the energy production for nuclear combustion reaches values of about 10^4 kcal m^{-3} sec $^{-1}$, which comes into the magnitude of the charges of familiar chemical fuels. They are substantially lower for heavier atoms, and in any case increase with the square of the combustion pressure.

Moreover the half lives of burn-up in the fastest reactions may fall to values as low as those for chemical fuels, so that, despite the high temperature, the radiated energy can remain smaller than the energy produced, particularly if an inefficiently-radiating, light, fully-ionised reacting material, like hydrogen, is used.

On the other hand, the fraction of completely ionised particles in the gases undergoing nuclear combustion must not exceed a certain upper limit, because the densities ($\sim 10^{-10}$ g cm^{-3}) lie in the range of high vacua and only for the mentioned fraction of non-ionised particles such small mean free paths can be retained, so that chamber-diameters of several dozen meters will suffice.

Under these conditions it appears that continuously maintained stable nuclear reactions, at practical pressures and dimensions are fundamentally possible and one can visualise their application as energy sources for power plants and propulsion units.

Three basic methods of utilising the enthalpy of nuclear-reaction gases, of the order of 10^{10} kcal/kg, in jet-propulsion units, suggest themselves: The direct expansion of these gases in a pure atomic rocket; the admixture of the reacting gases with the surrounding air in turbo- or ram-jets, or with other inert gases in thermal atomic rockets, and the conversion of energy in photon-gas in the photon-rocket.

For the last two methods the combustion pressures available in practice seem scarcely sufficient to guarantee the necessary chamber charges.

On the other hand, the technical conditions for the operation of stable nuclear reactions in central power stations, marine propulsion plants, or in pure atomic rockets seem much more attainable in the circumstances.

Résumé. On applique les théories astrophysiques des combustions nucléaires continues des astres aux données des combustions nucléaires continues techniques, qui disposent de pressions de combustion, de dimensions géométriques de chambre de combustion et de délais pour combustion complète beaucoup plus petits.

On trouve des maxima de la production de chaleur par seconde et par unité de volume du gaz de feu, qui, pour les réactions entre les différentes isotopes de l'hydrogène, sont situés auprès de 10^8 °K de température, et pour les atomes plus lourds aux températures encore plus hautes.

Pour les hydrogènes et pour la pression de combustion de l'ordre de 100 kg/cm 2 , les valeurs de ces maxima s'approchent aux valeurs des productions de chaleur des combustions chimiques, qui sont de l'ordre de 10^4 kcal $m^{-3}s^{-1}$, tandis que pour des atomes plus lourds, la production de chaleur reste beaucoup plus basse, mais en tout cas elle monte toujours avec le carré de la pression de feu.

Pour les réactions thermonucléaires les temps de moitié de la combustion nucléaire peuvent se diminuer jusqu'aux valeurs équivalentes des combustion chimiques, de manière que, malgré des hautes températures, le rayonnement d'énergie reste plus petit que la production d'énergie, surtout si l'on envisage des combustibles à faible rayonnement, c. à. d. assez facile à ioniser complètement, comme d'ailleurs les hydrogènes.

D'autre côté, le degré de ionisation complète du gaz de feu nucléaire ne doit pas dépasser une certaine valeur maximum parceque les densités des gaz de feu nucléaires sont si faibles ($\sim 10^{-10}$ g cm^{-3}) et si proches aux valeurs des grandes

Stationäre Kernverbrennung in Raketen¹

Von

E. Sänger, Stuttgart², GfW

(Mit 7 Abbildungen)

Zusammenfassung. Die astrophysikalischen Theorien stationärer kosmischer Kernverbrennungen werden auf die Bedingungen stationärer technischer Kernverbrennungen übertragen, die sich von den ersteren besonders durch die wesentlich kleineren verfügbaren Feuerdrücke, Feuerungsabmessungen und Ausbrennzeiten unterscheiden.

Es ergeben sich Maxima der sekundlichen Wärmeproduktion je Volumseinheit des Feuergases, die bei Reaktionen zwischen den verschiedenen Wasserstoffisotopen bei etwa 10^8 °K liegen, bei schwereren Atomen aber noch höher ansteigen, und die nur für Wasserstoffe bei Feuerraumdrücken von der Größenordnung 100 atm. an die Feuerraumbelastungen bekannter chemischer Feuerungen von etwa 10^4 kcal m⁻³ sec⁻¹ heranreichen, für schwerere Atome meist wesentlich niedriger bleiben und im übrigen mit dem Quadrat des Feuerdruckes wachsen.

Dabei können die Halbwertszeiten des Ausbrandes für die schnellsten Reaktionen bis fast auf jene chemischer Feuerungen heruntergehen, so daß trotz der hohen Feuertemperaturen die Energieausstrahlung kleiner als die Energieproduktion bleiben kann, wenn man besonders strahlungsarme, also leicht vollionisierende Brennstoffe, wie die Wasserstoffe, benutzt.

Anderseits darf der Vollionisierungsgrad des Kernfeuergases einen bestimmten hohen Wert nicht überschreiten, weil die sehr geringen Feuergasdichten ($\sim 10^{-10}$ g cm⁻³) bei den Werten hoher Vakua liegen und nur bei dem genannten Mindestanteil nicht vollionisierter Partikel die mittleren freien Weglängen so klein bleiben, daß man mit Feuerraum-Mindestabmessungen von einigen Dutzend Metern auskommt.

Unter diesen Einschränkungen scheint die dauernde Aufrechterhaltung stationären Kernbrandes bei technischen Drücken und Abmessungen grundsätzlich möglich und man kann seine Anwendung als Energiequelle für Kraftwerke und Triebwerke ins Auge fassen.

Zur Nutzbarmachung der Enthalpie des Kernfeuergases von der Größenordnung 10^{10} kcal/kg in Strahltriebwerken bieten sich drei grundsätzliche Wege: Die unmittelbare Expansion des Kernfeuergases in reinen Atomraketen, die Beimischung des Kernfeuergases zur Umgebungsluft oder zu anderen, inerten Arbeitsgasen in Luftstrahltriebwerken und thermischen Atomraketen, und die Umwandlung der Energie in Photonengas in den Photonenspektren.

Für die beiden letzteren Wege scheinen die technisch verfügbaren Feuerdrücke kaum auszureichen, um die notwendige Feuerraumbelastung sicherzustellen.

Hingegen scheinen die technischen Bedingungen für den Betrieb stationärer Kernfeuerungen in ortsfesten oder Schiffs-Kraftwerken oder in reinen Atomraketen sehr großer Abmessungen unter Umständen erfüllbar.

¹ Vorgelegt beim V. I.A.F.-Kongreß in Innsbruck am 5. August 1954.

² Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, Stuttgart-Flughafen.

vides, qu'il faut limiter les libres parcours moyens des particules par un certain nombre de particules, qui ne sont pas complètement ionisées, afin de limiter les dimensions géométriques minima des fourneaux nucléaires à quelques douzaines de mètres.

Tenant compte de ces restrictions, il semble possible, en principe, de faire marcher la combustion nucléaire continue aux pressions et aux dimensions techniquement disponibles, et d'envisager son application pour des centrales d'énergie stationnaires et pour des propulseurs.

En ce qui concerne l'application dans les propulseurs de l'aéronautique et de l'astronautique, on envisage trois méthodes:

L'expansion immédiate du gaz de feu nucléaire dans les fusées atomiques pures, le mélange des gaz nucléaires avec l'air ambiant ou avec d'autres masses gazeuses inertes dans les réacteurs à air ou dans les fusées atomiques, dites thermiques, et enfin la transformation de l'enthalpie nucléaire en gaz photonique dans les fusées à photons.

Pour les deux dernières possibilités, les pressions disponibles ne semblent pas suffisantes pour assurer une production d'énergie assez grande.

Mais on a l'impression, que les données techniques disponibles suffisent pour réaliser la combustion nucléaire continue dans des centres d'énergie stationnaires ou des vaisseaux, et dans les fusées atomiques pures de très grandes dimensions.

Vol.
1
955

I. Soziologische und technische Problemlage

Wir wissen, daß die technische Verwirklichung der Weltraumfahrt von der Menschheit eine Anstrengung in Höhe von zunächst noch elfstelligen Arbeitsstundenzahlen verlangt, und daß ein einzelner von uns in seinem Leben bestenfalls eine fünfstellige Zahl beizusteuern vermag, so daß also einige Millionen Menschen sich hauptamtlich mit Raumfahrt befassen müssen.

Dies ist auch insofern schon der Fall, als wir Luftfahrt nur als eine Anfangsstufe der Raumfahrt ansehen können.

Dieser Aufwand kann in zweierlei Weise für die Raumfahrt ausgegeben werden: entweder durch einen einmaligen, großen und schweren Entschluß, oder aber durch sehr viele kleine, leichtere Entschlüsse, was materiell schließlich auf daselbe hinausläuft, keineswegs aber psychologisch dieselben Schwierigkeiten macht.

Der große, schwere Entschluß wäre nötig zur unmittelbaren Inangriffnahme einer technischen Entwicklung bemannter Raumfahrzeuge auf der Grundlage der heute bestehenden chemischen Raketentriebwerke. Dieser Weg wird unter dem Druck militärischer Notwendigkeiten heute teilweise in seinen Anfangsstrecken begangen, doch zaudert die große Allgemeinheit vor seiner endgültigen Inangriffnahme noch erheblich, da er sehr hohe Investitionen für ein eng umrissenes Ziel erfordert, und da die Millionen notwendiger Raumfahrtarbeiter sich sofort auf alle Berufskategorien der Luftfahrt erstrecken müßten, die heute für eine Vielfalt anderer Zwecke bezahlt werden.

Der geräuschlosere Weg der vielen kleinen Entschlüsse ist jener der technischen Forschung, besonders auf dem Weg der atomphysikalischen Raketentriebwerke, nach deren Verwirklichung die Durchführung der Raumfahrt selbst ganz erheblich billiger, risikoloser und wirkungsvoller zu werden verspricht. Bei dieser technischen Forschung beschränken sich die erforderlichen Raumfahrtarbeiter zunächst stärker auf das Forschungspersonal der Luftfahrt und anderer Disziplinen, das sich leichter auf die Forschungsprobleme der Raumfahrt lenken läßt.

Dieser zweite Weg zur Raumfahrt wird ebenfalls schon stark begangen, da die treibenden Kräfte für die Lösung des technischen Zentralproblems, der Umwandlung von Materie in Energie, dort nicht allein die Raumfahrtinteressenten

sind, sondern eine breite Vielfalt von Energiewirtschaftlern, Waffentechnikern, Land- und Wasser-Fahrzeugbauern, Luftfahrern usw. und die hinter ihnen stehenden mächtigen Organisationen, die alle von den Ergebnissen der atomphysikalischen und kernchemischen Forschung eine gewaltige Befruchtung und Förderung ihrer Teilgebiete zu erwarten haben, und neben denen auch die Raumfahrer das Ziel ihrer Bestrebungen auf wirtschaftlicher Grundlage und mit weitestreichenden Leistungen erwarten dürfen.

Beide Wege liegen derzeit in einem gesunden gegenseitigen Wettbewerb und unterscheiden sich in ihrem technischen Kern dadurch, daß der erstere die seit Bestehen der Menschheit technisch verwendeten chemischen Verbrennungen mit Umwandlungsgraden der Materie in Energie von etwa 10^{-10} benutzt, während der zweite Weg die in der Natur vorkommenden hundertprozentigen Umwandlungen von Materie in Energie anstrebt, zumindest aber die im Forschungsstadium stehenden Kernverbrennungen mit Umwandlungsgraden von etwa 10^{-3} ins Auge faßt.

Ihnen wird man nach ihrer technischen Meisterung größere Rückwirkungen auf die Menschheitsgeschichte voraussagen dürfen, als die mythische Prometheus-Tat erzeigte.

Nach Ansicht der Astrophysiker bilden stationäre Kernverbrennungen die überwiegende Energiequelle allen kosmischen Geschehens und dadurch mittelbar auch allen Lebens auf der Erde.

Der Stand der kernphysikalischen Forschung erlaubt uns anzunehmen, daß die neuen Prometheuse schon unter uns leben, die auch dieses Feuer vom Himmel holen und der Menschheit zum unmittelbaren technischen Gebrauch bescheren werden — als stationäre technische Kernverbrennung.

Die Schwierigkeiten dieses Unterfangens liegen vor allem darin, daß die stationäre technische Kernverbrennung nur über unvergleichlich viel kleinere Feuerdrücke und Verbrennungszeiten verfügen kann als die stationäre kosmische Kernverbrennung in den Mittelpunkten der Sonne und der Sterne.

Mit diesen technischen Schwierigkeiten, insbesondere bei der Anwendung stationären Kernbrandes in Strahltriebwerken, befaßt sich diese Arbeit.

Vol
1
195

II. Das Kernbrand-Plasma

Ein ruhendes Gas enthält bekanntlich nach der in Abb. 1 dargestellten MAXWELL-BOLTZMANNSchen statistischen Verteilung neben einer häufigsten, durch seine Temperatur T bestimmten thermischen Partikelgeschwindigkeit $c^2 = 2 k T/A M$, auch alle anderen thermischen Schwirrgeschwindigkeiten der Gaspartikel zwischen Null und Unendlich, und zwar in umso geringerer Häufigkeit, je weiter die jeweils betrachtete Geschwindigkeit von der wahrscheinlichsten entfernt ist.

Die Stöße zwischen den Gaspartikeln werden unter der Voraussetzung normaler Temperatur des Gases überwiegend elastischer Natur sein, das heißt es wird bei ihnen weder kinetische Translationsenergie verloren gehen, noch gewonnen werden.

Verfolgt man innerhalb der MAXWELL-Verteilung des gegebenen Gases die Geschwindigkeiten nach oben, so trifft man indes schon bald auch auf unelastische Stöße, bei denen z. B. Energie in die inneren, gequantelten Freiheitsgrade — etwa der Rotation, Schwingung oder Termanregung — der Gasmoleküle oder Atome verschwindet und damit der Translationsenergie und Translations-temperatur der Gaspartikel entzogen wird.

Diese Energie innerer Freiheitsgrade kann ihrerseits Anlaß zur Abspaltung von Photonen geben, die, wenn das Gasvolumen als unendlich groß gegenüber deren freien Weglängen angenommen wird, nun ein im Gleichgewicht befindliches Photonengas innerhalb des eigentlichen Ruhemassenkorpuskel-Gases bilden.

In weiterer Verfolgung der immer schnelleren und immer selteneren Stoßgeschwindigkeiten findet man dann Stöße, die zur Dissoziation der Gasmoleküle in Radikale und Atome führen, welche anderseits gelegentlich weiterer Stöße wieder rekombinieren können, was bei passenden Rekombinationspartnern auch zu unelastischen Stößen mit Energiegewinn führen kann, der bei adiabatischem Abschluß der gesamten Gasmasse zur Erhöhung der kinetischen Translationsenergie und damit der Temperatur führen muß.

Bei noch etwas höheren Stoßgeschwindigkeiten kommt es weiter zu Einfach- bis Mehrfach-Ionisation der Moleküle bzw. Atome, die mit wachsender Stoßgeschwindigkeit bis zur Vollionisation fortschreiten kann, womit dann der Weg freigelegt ist zu Stößen zwischen Atomkernen selbst.

Diese Kernstöße werden zunächst wieder überwiegend elastisch erfolgen; nur in ganz seltenen Fällen werden die noch verhältnismäßig geringen Stoßgeschwindigkeiten infolge des wellenmechanischen Tunnel-Effektes schon zu Kernreaktionen führen, also Stößen, mit im Durchschnitt bis zu 10^7 -fach höherer Energieentbindung als die chemischen Rekombinationsstöße. Erst bei jenen sehr schnellen und demgemäß außerordentlich seltenen Stößen, deren Energie ausreicht, das COULOMB-Potential des elektrischen Kernfeldes klassisch zu überwinden, wird unter Umständen die Mehrzahl der Kernstöße Kernreaktionen auslösen, die also ebenso wie chemische Reaktionen in jedem Gas unserer Umgebung und insbesondere in den Feuergasen unserer Triebwerke dauernd stattfinden, wenn auch so selten, daß sie sich der Beobachtung meist entziehen und energetisch völlig bedeutungslos sind.

Bei wirklich adiabatischem Abschluß des bisher betrachteten Gases müßten natürlich auch diese sehr seltenen Kernreaktionen zu einer allmählichen Erhöhung der Gastemperatur führen, die ihrerseits zur Folge hätte, daß die Häufigkeit aller beschriebenen, an hohe Stoßgeschwindigkeiten geknüpften Prozesse nach Maßgabe der MAXWELL-Verteilung immer rascher zunehmen würde, bis das Gas schließlich infolge der lawinenartig anwachsenden thermischen Kernreaktionen explosionsartig einer Endtemperatur von der Größenordnung 10^{10} Grad zustreben würde, wenn es aus leichten Elementen besteht.

Dieser natürliche und selbsttätige Prozeß tritt in unserer engeren Umgebung nicht auf, weil keine Gasmassen unendlich großen Volumens vorhanden sind, und weil keine Begrenzung eines endlichen Volumens völlig wärmemedikt ist.

Wenn der Mensch sich unterfängt, diesen Prozeß künstlich hervorzurufen, so wird er dabei die genannten Randbedingungen möglichst vorteilhaft gestalten müssen, hauptsächlich dadurch, daß er die Wärmeverluste an die Umgebung

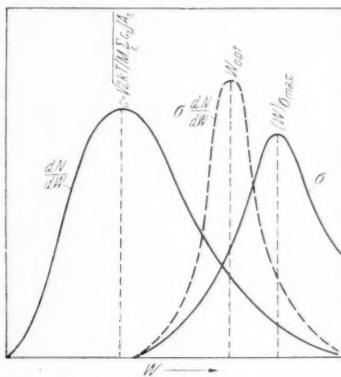


Abb. 1. MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung dN/dw der Partikelgeschwindigkeiten im Kernbrand-Plasma; Verlauf der Wirkungsquerschnitte σ von thermischen Kernreaktionen über der Partikelgeschwindigkeit w und Kurve der Reaktionshäufigkeit $\sigma dN/dw$.

durch möglichste Beschleunigung des Vorganges herabsetzt, indem er beispielsweise die lange Anlaufperiode durch künstliche Aufheizung möglichst vorwegnimmt.

Auf diese Weise ist es bekanntlich bereits gelungen, explosionsartige thermische Kernverbrennungen gewisser Atomarten in technischem Maßstab hervorzurufen.

Die ursprüngliche Form, in der die Energie bei chemischen Verbrennungsreaktionen zunächst anfällt, und der Mechanismus, nach dem sie sich auf die Feuergaspartikel verteilt, sind noch sehr wenig bekannt und erst in neuester Zeit zu untersuchen begonnen worden.

Bei kernchemischen Reaktionen sind wir über den eigentlichen, primären Aufheizvorgang weit besser unterrichtet, dank der unmittelbaren Beobachtungsmöglichkeit von Bahnen und Geschwindigkeiten der Kernreaktionsprodukte infolge ihrer Ionisationswirkung in umgebenden Gasen, die den chemischen Reaktionsprodukten wegen ihrer viel geringeren Energien bisher fehlt.

Zunächst läßt sich schon die kernchemische Wärmetönung aus dem Massendefekt der an der Reaktion beteiligten Partner mit ziemlicher Genauigkeit vorherberechnen, was bei chemischen Reaktionen bekanntlich nicht möglich ist, da die Massendefekte dabei jenseits aller Wägungsgenauigkeit klein sind.

Ferner ist die Mannigfaltigkeit der Freiheitsgrade zur Aufnahme dieser eben gebildeten Energie bei chemischen Reaktionen wesentlich größer (Translation der Reaktionsprodukte und allfälliger Photonen, Rotation, Oszillation, Term-anregung, Ionisation) als bei Kernreaktionen, wo bevorzugt nur die Translation der Reaktionsprodukte und der Photonen in Frage kommt.

Die Kernreaktion verläuft so, daß die beiden Reaktionspartner zu einem instabilen Zwischenkern von sehr kurzer Lebensdauer zusammentreten, der dann je nach dem Grad seiner Anregung und seinen individuellen Eigenschaften entweder in zwei etwa gleich große Teile zerfällt (Spaltung), oder in sehr viele kleinere Teile (Spallation), oder aber nur einzelne kleine Teilchen (α -Partikel, Protonen, Neutronen, Elektronen, Positronen, Photonen) wieder aussendet, welch letzterer Vorgang bei Kernverbrennungen bisher bevorzugt untersucht wurde.

Die überschüssige Energie (Wärmetönung der Reaktion) tritt dabei als kinetische Translationsenergie in Erscheinung, die neugebildeten Teilchen fliegen mit großer Geschwindigkeit auseinander, wie man übrigens neuerdings auch für chemische Verbrennungsreaktionen mehr und mehr anzunehmen gezwungen ist.

Da der kernchemische Ausbrennvorgang bei stationären technischen Drücken oft ganz erheblich länger dauert als jener chemischer Verbrennungen gleicher Drücke, erfahren die neugebildeten, abreagierten Teilchen sehr viele elastische Zusammenstöße mit den übrigen Partikeln des Reaktionsplasmas, also mit Atomkernen und Elektronen, und nehmen mit diesen sofort die MAXWELL-BOLTZMANNsche Geschwindigkeitsverteilung an.

Bei den hier interessierenden Temperaturen und Drücken beträgt die freie Weglänge der Partikel größtenteils 10^7 cm innerhalb eines vollionisierten Plasmas, 10^{-1} cm im gleichheißen, nichtvollionisierten Plasma, und in einem darumgelegten, kühleren Gasmantel, in dem Kernreaktionen also nur mehr selten stattfinden, so viele Zehnerpotenzen weniger, wie dieser kälter ist.

Aus einem vollionisierten Plasma technisch vorstellbaren, stationären Druckes würden die Partikel also augenblicklich abdiffundieren, selbst wenn der Durchmesser der Brennzone astronomische Abmessungen hätte.

Nur durch Anwendung eines Plasmas, das einen merklichen Anteil nicht-vollionisierter Partikel (z. B. schwerer Atome) enthält, und durch höchstmögliche Drücke kann man hoffen, die geometrischen Abmessungen des Reaktionsplasmas in technisch vorstellbaren Größenordnungen zu halten.

III. Thermische Kernreaktionen und Energierate

Die Probleme der Energieproduktion durch thermische Kernreaktionen sind besonders durch die Arbeiten der Astrophysiker aufgeklärt worden und wir folgen hier im wesentlichen den bekannten Arbeiten von G. GAMOW [1].

Kernreaktionen zwischen vollionisierten Atomen, also nackten, positiv geladenen Atomkernen, werden sehr wahrscheinlich, wenn die relativen Stoßgeschwindigkeiten der Partner so hoch sind, daß sich die Kernmittelpunkte entgegen ihren COULOMB-Feldern beim Stoß bis auf die Summe der Materie-Wellenlängen der Partikel nähern.

Aus wellenmechanischen Gründen kann in selteneren Fällen der Potentialwall auch schon durch langsamere Stöße durchdrungen werden, allerdings mit einer Wahrscheinlichkeit, die exponentiell mit der Stoßgeschwindigkeit abnimmt.

Die Wahrscheinlichkeit der Kernreaktion eines in einem Kern eingedrungenen Partikels ist außerdem noch bestimmt durch die Resonanzverhältnisse des gebildeten Zwischenkerns und durch die Austrittswahrscheinlichkeit eines Partikels aus diesem Zwischenkern.

Alle diese Einflüsse auf die Reaktionswahrscheinlichkeit werden anschaulich in dem sogenannten Reaktions-Wirkungsquerschnitt σ zusammengefaßt, dessen Verlauf in Abb. 1 schematisch für Reaktionen zwischen geladenen Teilchen über der Stoßgeschwindigkeit dargestellt ist.

Der Wirkungsquerschnitt für thermische Kernreaktionen zwischen geladenen Teilchen wächst mit der Stoßgeschwindigkeit w exponentiell an, bis die kinetische Energie von gleicher Größenordnung ist wie die potentielle Energie am Gipfel des Potentialwalles, dann wird die Zunahme langsamer, der Wirkungsquerschnitt erreicht ein Maximum, um schließlich bei sehr hohen Stoßgeschwindigkeiten mit weiter wachsendem w wieder abzunehmen, weil die Aufenthaltsdauern des stoßenden Partikels im getroffenen Kern immer kürzer werden und zur Kernreaktion immer weniger ausreichen.

GAMOW gibt für diesen Verlauf die quantitative Beziehung:

$$\sigma = \lambda^2 \pi \times \exp(8\pi e \sqrt{2 R A M Z_1 Z_2 / h} - 4 \sqrt{2} \pi^2 e^2 Z_1 Z_2 / h w) \times 4 \pi^2 \Gamma R^2 A M / h^2 \quad [cm^2] \quad (1)$$

Die Formelzeichen bedeuten darin:

$$\lambda = \lambda/2\pi \quad \text{die Streuwellenlänge [cm],}$$

$$\lambda = h/A M w \quad \text{die DE BROGLIE-Wellenlänge der Materiewelle der Teilchen [cm],}$$

$$A = A_1 A_2 / (A_1 + A_2) \quad \text{die reduzierte Atomgewichtszahl für Energieabsorption im plastischen Stoß [-],}$$

$$A_1, A_2 \quad \text{Atomgewichtszahlen der Stoßpartner [-],}$$

$$M = 1,6604 \cdot 10^{-24} g \quad \text{Nukleonenmasse,}$$

$$e = 4,805 \cdot 10^{-10} cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-1} \quad \text{Elementarladung,}$$

$$R = [1,7 + 1,22 (A_1 + A_2)^{1/3}] \cdot 10^{-13} cm \quad \text{Radius des Zwischenkerns,}$$

$$Z_1, Z_2 \quad \text{Kernladungszahlen der Stoßpartner [-],}$$

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} ergsec \quad \text{PLANCKSches Wirkungsquantum,}$$

$$\Gamma \quad \text{Halbwertsbreite der Kernresonanzstelle [erg].}$$

Die drei Einzelprodukte in Gl. (1) bedeuten physikalisch:
 $\lambda^2 \pi$ den wirksamen Streuquerschnitt,
die e -Potenz stellt den Übertragungskoeffizienten dar, der auch den Tunnel-effekt enthält, und ab Stoßgeschwindigkeiten $w' = e\pi/2 \cdot \sqrt{Z_1 Z_2 / R A M}$ größer als eins wird, so daß der Reaktionsquerschnitt σ grundsätzlich größer als der Streuquerschnitt werden kann. Der Höchstwert des Übertragungskoeffizienten für $w = \infty$ liegt in der Größenordnung 10^1 . Die genannte Geschwindigkeit w' ist gleich jener, die zur Annäherung der Kernmittelpunkte entgegen den COULOMB-Feldern auf $8/\pi^2 \cdot R \sim R$ nötig ist.

Der Bruch als drittes Einzelprodukt endlich ist das Verhältnis der Reaktions-wahrscheinlichkeit $2\pi I/h$ zur Eigenfrequenz $h/2\pi R^2 A M$ des Kerns. Dieses Verhältnis liegt für (p, a) -Reaktionen in der Nähe von eins, so daß dann jede Durchdringung des Potentialwalles zur Reaktion führt. Für (p, γ) -Reaktionen ist es meist 10^4 bis 10^5 mal kleiner, für (p, β) -Reaktionen bis zu 10^{21} mal kleiner. Genauer kann I nur fallweise durch Versuche bestimmt werden.

Man kann Gl. (1) noch in die etwas handlichere Form bringen:

$$\sigma = R^2 \pi \frac{\Gamma}{A M w^2} \exp \left[\frac{4\sqrt{2\pi e} \sqrt{Z_1 Z_2}}{h} (2) \sqrt{R A M} - \pi e \sqrt{Z_1 Z_2 / w} \right] \text{ [cm}^2\text{].} \quad (1 \text{ a})$$

Der Verlauf des Reaktionsquerschnittes σ über der Stoßgeschwindigkeit w hat ein Maximum bei der Stoßgeschwindigkeit

$$(\omega)_{\sigma_{max}} = 2\sqrt{2\pi^2 e^2 Z_1 Z_2 h} \text{ [cm s}^{-1}\text{]}, \quad (1 \text{ b})$$

die also keinerlei Beziehung zu der früher genannten Geschwindigkeit w' hat. Der größte Reaktionsquerschnitt wird bei dieser Geschwindigkeit:

$$\sigma_{max} = R^2 \pi \frac{h^2 \Gamma}{8\pi^4 A M e^4 Z_1^2 Z_2^2} \exp \left(\frac{8\pi e \sqrt{2 R A M Z_1 Z_2}}{h} - 2 \right). \quad (1 \text{ c})$$

Die hinsichtlich σ optimale Stoßgeschwindigkeit nach Gl. (1 b) läßt sich indes folgendermaßen veranschaulichen:

Ihre zugehörige absorbierte kinetische Energie beträgt:

$$(E)_{\sigma_{max}} = \frac{A M (\omega^2) \sigma_{max}}{2} = \frac{4\pi^4 A M e^4 Z_1^2 Z_2^2}{h^2}$$

und ihre zugehörige DE BROGLIE-Wellenlänge:

$$\lambda = \lambda/2\pi = h/2\pi A M (\omega)_{\sigma_{max}} = \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi^3 A M e^2 Z_1 Z_2}}.$$

Das heißt

$$(E)_{\sigma_{max}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{2/\pi} \cdot \lambda}. \quad (1 \text{ d})$$

Die absorbierte kinetische Energie ist gleich dem COULOMB-Potential bei gegen-seitiger Annäherung der Partikel auf die $\sqrt{2}/\pi$ -fache DE BROGLIESche Streu-wellenlänge.

Wenn damit der Wirkungsquerschnittsverlauf in Abb. 1 bekannt ist, läßt sich die Häufigkeit der in einem gegebenen Plasma stattfindenden Kernreaktionen berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeitskurve der Reaktionen (σ) mit der Wahrscheinlichkeitskurve der thermischen Geschwindigkeiten (dN/dw) multipliziert.

Das in Abb. 1 gestrichelt angedeutete Produkt hat ein scharfes Maximum bei

$$w_{opt} = \left(\frac{4\sqrt{2\pi^2 e^2 Z_1 Z_2 k T}}{A M h} \right)^{1/3}. \quad (2)$$

GAMOW hat den Verlauf des Produktes über w integriert, indem er den tatsächlichen Verlauf durch eine GAUSSche Wahrscheinlichkeitskurve von gleicher Höhe und Breite ersetze, und erhält so die Energieproduktion durch thermische Kernreaktionen je Massen- und Zeiteinheit des Reaktionsplasmas zu

$$\Delta E = E \varrho c_1 c_2 k_1 \frac{(k_2 T^{-1/3})^2}{\exp(k_2 T^{-1/3})} \quad [\text{erg g}^{-1} \text{sec}^{-1}]. \quad (3)$$

Darin bedeuten

E Wärmetönung der Einzelreaktion [erg],

ϱ Plasmadichte [g cm^{-3}],

c_1, c_2 relative Gewichtskonzentrationen der Reaktionspartner [—],

$k = 1,3805 \cdot 10^{-16} \text{ erggrad}^{-1}$ BOLTZMANN-Konstante.

$$k_1 = \frac{2}{3^{5/2} \pi M^3 A A_1 A_2 e^2 Z_1 Z_2} \exp \left(\frac{2\pi^2 R A M e^2 Z_1 Z_2}{h^2} \right)^{1/2} \quad [\text{cm}^3 \text{g}^{-2} \text{sec}^{-1}] \quad (3 \text{ a})$$

$$k_2 = \left(54 \pi^4 \frac{A M e^4 Z_1^2 Z_2^2}{h^2} \right)^{1/3} \quad [\text{grad}^{1/3}]. \quad (3 \text{ b})$$

k_1 und k_2 sind Stoffkonstanten der Reaktionspartner, die man ein für allemal ausrechnen kann.

Aus Gl. (3) folgt durch Differenzieren auch ein Maximum der Energierate über der Temperatur bei

$$T_{opt} = (k_2/2)^3 = \frac{54 \pi^4 A M e^4 Z_1^2 Z_2^2}{8 k h^2} \quad (3 \text{ c})$$

und in der Höhe von

$$\Delta E_{max} = (2/e)^2 E \varrho c_1 c_2 k_1 = \frac{R^2 \Gamma h}{3^{5/2} \pi M^3 A A_1 A_2 e^2 Z_1 Z_2} \exp \left(\frac{8\pi e \sqrt{2 R A M Z_1 Z_2}}{h} - 2 \right). \quad (3 \text{ d})$$

Die von der Plasmadichte unabhängige Lage dieses Optimums ergibt sich näherungsweise daraus, daß in Abb. I die Lage von $(w)_{opt}$ nach Gl. (1 b) temperaturunabhängig ist, während die wahrscheinlichste Geschwindigkeit c mit wachsender Temperatur T immer größer wird und mit $(w)_{opt}$ zur Deckung gebracht werden kann. Wenn daher die Plasmatemperatur so gewählt wird, daß die Geschwindigkeit größter Reaktionshäufigkeit innerhalb einer gegebenen MAXWELL-Verteilung [Gl. (1 b)] zusammenfällt mit der $(A \sum c_i / A_i)^{-1/2}$ -fachen

häufigsten Geschwindigkeit $c = (2 k T \sum c_i / A_i / M)^{1/2}$ in der MAXWELL-Verteilung, so ist dies ungefähr die Temperatur größter Reaktionswahrscheinlichkeit

$$T_{opt} \sim \frac{4\pi^4 A M e^4 Z_1^2 Z_2^2}{k h^2}, \quad (4)$$

während Gl. (3 c) den genauen Wert um 69% höher ergibt, was daher röhrt, daß die von der $\sigma dN/dw$ -Kurve überdeckte Fläche nicht genau dann am größten wird, wenn das Maximum dieser Kurve am größten ist.

Wenn das Maximum der MAXWELL-Kurve dN/dw in Abb. I zusammenfällt mit dem Maximum der σ -Kurve, so muß natürlich auch die $\sigma dN/dw$ -Kurve an derselben Stelle ihr Maximum haben, wie man sich leicht überzeugt durch Gleichsetzen der Gln. (1 b) und (2) untereinander oder mit $c^2 = 2 k T / \bar{A} M$.

Man kann schließlich die sehr wichtige Optimaltemperatur thermischer Kernverbrennung bei konstanter Dichte ϱ nach Gl. (3 c) anschaulich auch folgendermaßen verstehen:

Beim plastischen Stoß zweier verschieden schwerer Partikel folgt die absorbierte Energie nach den klassischen Stoßgesetzen aus Impuls- und Energiesatz zu

$$\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \frac{M w^2}{2} = \frac{A M w^2}{2}. \quad (5)$$

Um zwei geladene Teilchen entgegen der COULOMBSchen Abstoßung bis auf die $8/\pi \sqrt{54}$ -fache DE BROGLIESche Streuwellenlänge $\lambda = \lambda/2\pi = h/2\pi A M w$ einander anzunähern, ist eine Absorption kinetischer Energie in der Höhe

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8/\pi \sqrt{54} \cdot \lambda} = \frac{\sqrt{54} \pi Z_1 Z_2 e^2 2 \pi A M w}{8 h} = \frac{A M w^2}{2}$$

notwendig, daher eine Stoßgeschwindigkeit

$$w = \frac{\sqrt{54} \pi^2}{2} \cdot \frac{e^2 Z_1 Z_2}{h}$$

Wenn diese notwendige Stoßgeschwindigkeit w gleich der häufigsten Geschwindigkeit $c^2 = 2 k T/A M$ in der MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung wird, dann ist die Gastemperatur dabei wieder T_{opt} nach Gl. (3 c).

Ähnlich wie die Lage des Maximums der Energieproduktionskurve Gl. (3) kann man sich auch die Höhe dieses Maximums zu veranschaulichen versuchen.

Nach der MAXWELL-BOLTZMANN-Statistik ist die Zahl gegenseitiger Stöße von Partikeln zweier Arten im Gas je Massen- und Zeit-Einheit

$$N = \frac{4 c_1 c_2 \varrho \sqrt{k T}}{M^{5/2} A_1 A_2 \sqrt{2 \pi A}} \sigma_S, \quad (6)$$

also bei der Temperatur des Gipfels der Energieproduktionskurve, das heißt mit Gl. (3 c),

$$N = \frac{\sqrt{54} \pi^{3/2} c_1 c_2 \varrho e^2 Z_1 Z_2}{A_1 A_2 M^2 h} \sigma_S. \quad (7)$$

Wenn dort die überwiegende Zahl der Stöße nicht zur Streuung, sondern zur Reaktion führt, wird man statt des Streuquerschnittes σ_S den Reaktionsquerschnitt $\sim \sigma_{max}$ nach Gl. (1 c) setzen und damit den Näherungswert für das Maximum der Energierate erhalten:

$$\Delta E_{max} \sim \frac{\sqrt{54}}{8 \pi^{3/2}} E c_1 c_2 \varrho \frac{R^2 \Gamma h}{A_1 A_2 M^3 e^2 Z_1 Z_2} \exp \left(\frac{8 \pi e \sqrt{2 R A M Z_1 Z_2}}{h} - 2 \right), \quad (8)$$

der also um etwa 2% kleiner ist als der genaue Wert nach Gl. (3 d).

Mit den bisherigen Unterlagen ist es nun einfach, die technisch wichtigere Energierate der Kernverbrennung bei konstantem Druck p , statt wie bisher bei konstanter Dichte ϱ zu untersuchen.

Ersetzt man mit Hilfe der Gasgleichung

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{k}{A M} T \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{p M / k T}{\sum_i c_i / A_i} \quad (9)$$

(wobei die Einführung der LOSCHMIDTSchen Zahl $L = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ mit Hilfe der Beziehung $L M = 1 \text{ g mol}^{-1}$ umgangen wurde) in Gl. (3) die Dichte durch den Druck, so erhält man

$$\Delta E' = E p c_1 c_2 \frac{M k_1}{k \sum_i c_i / A_i} \frac{(k_2 T^{-1/3})^2}{T \exp(k_2 T^{-1/3})} \quad [\text{erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1}]. \quad (10)$$

Vol.
1
1955

Tabelle I. Kennzahlen von stochiometrischen Zweierstoß-Kernverbrennungen leichten, geladener Partikel

Nr.	Reaktion	Wärmetönung E MeV (cal g ⁻¹)	Resonanzbreite T' eV	Stoffkonstante der Gamow-Gleichung	Maximale Energierate bei konstantem Plasmadruck pro Masseneinheit bei konstanter Plasmadichte	Maximale Energierate pro Masseneinheit bei konstantem Plasmadruck	Maximale Energierate pro Volumeneinheit bei konstantem Plasmadruck	
				k_2 grad ^{1/3} cm ³ g ⁻² s ⁻¹	T_{opt} °K	$\Delta E_{max}' / p$ cal g ⁻¹ s ⁻¹ pro g cm ⁻³	T_{opt}' °K	$\Delta E_{max}'' / p^2$ cal cm ⁻³ s ⁻¹ pro atm ²
1	$H^1(p, e^+) H^2$	1,42 (1,64·10 ¹⁰)	~10 ⁸ (2·10 ⁻¹⁹)	3,39·10 ³	4,86·10 ⁹	7·10 ⁻⁷	3,12·10 ⁸	2,95·10 ⁻¹⁴
2	$H^2(p, \gamma) He^3$	5 (3,84·10 ¹⁰)	1 (10)	2,48·10 ²⁶ ~2·80·10 ²⁷	3,73·10 ³ 7,31·10 ³	6,50·10 ⁹ 5,74·10 ¹²	4,23·10 ⁸ 2,87·10 ⁵	9,27·10 ⁴ 1,02·10 ⁸
3	$H^3(p, \gamma) He^4$	20 (1,15·10 ¹¹)	10 (10)	~2·80·10 ²⁷	3,88·10 ³	2,18·10 ⁴	4,73·10 ⁸	5,98·10 ³
4	$He^3(p, e^+) He^4$	19,8 (1,14·10 ¹¹)	10	1,87·10 ²⁷	6,16·10 ³	1,44·10 ⁴	1,89·10 ⁹	3,50·10 ⁶
5	$Li^6(p, a) He^3$	3,8 (1,25·10 ¹⁰)	5,10 ⁵	8,70·10 ³¹	8,44·10 ³	7,52·10 ¹⁰	4,80·10 ⁹	4,57·10 ⁻¹
6	$Li^7(p, \gamma) ^2 He^4$	17,2 (4,95·10 ¹⁰)	4·10 ⁴	6,69·10 ³⁰	8,50·10 ³	7,71·10 ¹⁰	2,61·10 ⁷	5,14·10 ⁹
7	$Be^9(p, a) Li^6$	2,2 (5,07·10 ⁹)	10 ⁶	2,07·10 ³²	1,04·10 ⁴	1,40·10 ¹¹	8,48·10 ⁷	9,10·10 ⁹
8	$B^{10}(p, \gamma) C^{11}$	8,6 (1,80·10 ¹⁰)	10	2,67·10 ²⁷	1,21·10 ⁴	2,24·10 ¹¹	3,94·10 ¹³	1,45·10 ¹⁰
9	$B^{11}(p, a) ^2 He^4$	8,8 (1,69·10 ¹⁰)	10 ⁶	2,62·10 ³²	1,22·10 ⁴	2,25·10 ¹¹	3,64·10 ¹⁸	1,78·10 ¹⁰
10	$N^{15}(p, a) C^{12}$	4,84 (6,97·10 ⁹)	10 ⁷	4,54·10 ³³	1,54·10 ⁴	4,53·10 ¹¹	3,06·10 ¹⁹	2,93·10 ¹⁰
11	$H^2(d, n) He^3$	3,2 (1,84·10 ¹⁰)	3·10 ⁶	4,21·10 ³¹	4,28·10 ⁹	9,81·10 ⁹	6,98·10 ⁷	6,34·10 ⁸
12	$H^3(d, n) He^4$	17,5 (8,07·10 ¹⁰)	(10 ⁶)	~1,07·10 ³²	4,54·10 ³	1,18·10 ¹⁰	9,10·10 ¹⁸	7,58·10 ⁸
13	$Li^6(d, a) He^4$	22,1 (6,37·10 ¹⁰)	(10 ⁶)	~1,68·10 ³²	1,02·10 ⁴	1,33·10 ¹¹	1,44·10 ¹⁹	8,56·10 ⁹
14	$Li^7(d, a) He^5$	14 (3,59·10 ¹⁰)	(10 ⁶)	~1,68·10 ³²	1,03·10 ⁴	1,36·10 ¹¹	8,92·10 ¹⁸	8,76·10 ⁹
15	$H^3(t, ^2 n) He^4$	11 (4,22·10 ¹⁰)	(10 ⁶)	~7,5·10 ³¹	4,90·10 ³	4,88·10 ¹⁰	4,25·10 ¹⁸	9,55·10 ⁸
1	2	3	4	5	6	7	8	9
					10	11	12	13

Die Energieproduktion je Massen- und Zeit-Einheit hat bei festgehaltenem Druck ρ daher über der Temperatur T ein Maximum bei der nun niedrigeren Temperatur, und unabhängig vom Druck:

$$T_{opt}' = (k_2/5)^3 \quad (10 \text{ a})$$

und in der Höhe von

$$\Delta E_{max}' = (5/e)^5 E \rho c_1 c_2 \frac{M k_1}{k k_2^3 \sum_i c_i / A_i}. \quad (10 \text{ b})$$

Die Dauer des kernchemischen Ausbrandes ist charakterisiert durch die Halbwertszeit t des Reaktionsablaufes zu:

$$t = \frac{E}{\Delta E_{max}'} \cdot \ln 2. \quad (11)$$

Für den Bau von Kernfeuerungen ist ferner von größter praktischer Bedeutung die Energieproduktion je Volumseinheit bei vorgegebenem Feuerdruck.

Man erhält sie aus Gl. (3) durch Multiplikation mit ϱ und Ersatz der Dichte ϱ durch ρ und T mittels der Gasgleichung (9) zu:

$$\Delta E'' = E \rho^2 c_1 c_2 \frac{M^2 k_1}{(k \sum_i c_i / A_i)^2} \frac{(k_2 T^{-1/3})}{T^2 \exp(k_2 T^{-1/3})} [\text{erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}]. \quad (12)$$

Diese Energieproduktion je Volums- und Zeit-Einheit hat bei festgehaltenem Feuerdruck ρ über der Temperatur T ein Maximum bei der nun noch kleineren Temperatur und wieder unabhängig vom Druck:

$$T_{opt}'' = (k_2/8)^3 \quad (12 \text{ a})$$

und in der Höhe von

$$\Delta E_{max}'' = (8/e)^8 E \rho^2 c_1 c_2 \frac{M^2 k_1}{k_2^6 (k \sum_i c_i / A_i)^2}. \quad (12 \text{ b})$$

In Tab. I sind für fünfzehn ausgewählte Zweierstoß-Reaktionen zwischen leichten, geladenen Kernen die kennzeichnendsten Zahlengrößen stöchiometrischen Kernbrandes zusammengestellt nach den Gln. (1), (3 a), (3 b), (3 c), (3 d), (10a), (11), (12 a) und (12 b).

Es ist aber schon hier zu betonen, wie außerordentlich willkürlich diese Auswahl angesichts der nach Tausendenzählenden möglichen Zweierstoß-Reaktionen zwischen den Elementen des ganzen periodischen Systems ist, wie vielfach größer die Möglichkeiten noch für Dreier- und Mehrfach-Stöße werden, und wie das neuerdings sich entfaltende Gebiet der Mesonik unsere jetzt zu ziehenden Schlüsse als ein kindliches Anfangsbemühen erscheinen läßt.

Die erste Spalte der Tab. I gibt eine laufende Nummer, mit der die jeweilige Reaktion auf die späteren Diagramme bezogen wird.

Die zweite Spalte definiert die jeweilige Reaktion in der üblichen Symbol-schreibweise. Man erkennt, daß schematisch einige der ersten Elemente des Perioden-Systems mit Protonen, bzw. Deutonen und Tritonen kombiniert sind. Praktisch ist dabei zu beachten, daß in einer Kernverbrennung kaum jemals eine einzige dieser einfachen Reaktionen allein abläuft, sondern meist eine ganze Reaktionsfolge, wie z. B. der bekannte astrophysikalische Kohlenstoff-Stickstoff-Kreis heller Sterne zum Aufbau von Helium aus Wasserstoff (Abb. 2 a), oder die Wasserstoff-Kette dunklerer Sterne, ebenfalls zum Aufbau von Helium aus Wasserstoff (Abb. 2 b), oder der vermutete Wasserstoffbombe-Prozeß zum Aufbau von Helium aus Lithiumhydrid (Abb. 2 c).

Die dritte Spalte gibt die Wärmetonung E der einfachen Reaktion zweimal, einerseits in der bei den Kernphysikern üblichen Einheit in MeV je Einzelreaktion, und weiter in der technischen Einheit cal/g, also je Masseneinheit des Treibstoffes. In der letzteren Zahl erkennt man ohneweiters die gegenüber chemischen Heizwerten um sechs bis sieben Zehnerpotenzen höheren Energieausbeuten.

Die vierte Spalte enthält die gemessenen Halbwertsbreiten Γ der Kernresonanz, in eV. Für die in Klammern gesetzten Zahlen sind keine Meßwerte bekannt geworden, sie sind hier geschätzt, zum Teil nach den Ausführungen zu Gl. (1).

Die fünfte und sechste Spalte enthält die Stoffkonstanten der GAMOW-Gleichung für die Energierate nach den Gln. (3 a) und (3 b).

Die ersten Ergebnisse technischer Bedeutung beginnen mit den Spalten 7 und 8, wo die maximale Energierate pro Masseneinheit $A E_{\max}/\rho$ bei konstanter Plasmadichte ρ und die zugehörige Optimaltemperatur T_{opt} angegeben sind. Da die Energierate proportional der Dichte ist, erlaubt die Auftragung, den Wert für jede beliebige Dichte abzunehmen. Die eingetragenen Zahlen stellen die Rate bei der Dichte $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ dar, also am ehesten unter den Verhältnissen, wie sie in Sternmittelpunkten und in Atombomben auftreten können. Die hier nicht besonders eingetragenen Halbwertszeiten der Reaktionen gehen hinunter bis etwa 10^{-10} sec ; der Ausbrand verläuft unter diesen Verhältnissen bei vielen Reaktionen außerordentlich rasch und explosionsartig, die Optimaltemperaturen sind durchwegs wesentlich höher als in den Mittelpunkten normaler Sterne.

Für stationäre technische Kernverbrennungen wichtiger sind die folgenden Spalten. In Spalten 9, 10 und 11 sind die maximalen Energieraten bei konstantem Plasmadruck und wieder je Masseneinheit dargestellt, und zwar je Druckeinheit in Atmosphären, so daß die Energieraten für beliebige stationäre Drücke ohne weiteres durch Multiplikation der Zahlenwerte für die Druckeinheit mit dem jeweiligen Druck erhältlich sind. Die zugehörigen Optimaltemperaturen sind hier durchwegs mehr als eine Zehnerpotenz niedriger.

Die Halbwertszeiten für 1 atm. Druck sind angegeben, bei anderen Drücken ergeben sie sich durch Division der eingetragenen Zahlen durch den gewünschten Druck. Bei dem technisch zweifellos mäßigen Druck von 1 atm. liegen die Halbwertszeiten der Beispielreaktionen zwischen dem Millionenfachen des Alters unseres Kosmos und Bruchteilen einer Sekunde, so daß die Auswahl von Reaktionen für stationäre technische Kernverbrennungen in erster Linie nach dieser Spalte und nicht etwa nach der Wärmetonung erfolgen muß.

Schließlich sind in den Spalten 12 und 13 die maximalen Energieraten pro Volumseinheit bei konstantem Plasmadruck eingetragen, und zwar wieder für die Druckeinheit 1 atm. Bei anderen Drücken erhält man daher die Energierate je cm^3 durch Multiplikation mit dem Quadrat des jeweiligen Druckes.

Die auch hier druckabhängige Lage der Optimaltemperatur zeigt sich nochmals merkbar vermindert gegenüber den Werten der Spalte 9.

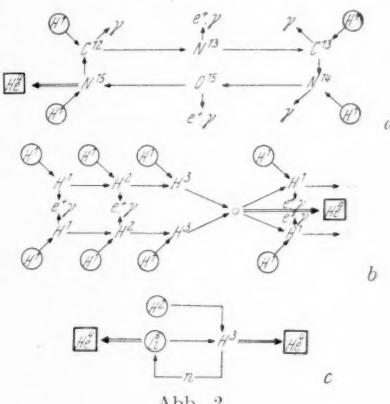


Abb. 2

Die schnellsten Reaktionen sind unter diesen Verhältnissen besonders jene des Deuteriums, Tritiums und Lithiums bei Temperaturen der Größenordnung 10^8 Grad für die leichteren und 10^9 Grad für die schwereren Elemente.

Die Energieproduktion bleibt je Raumeinheit, besonders wegen der extrem geringen Gasdichte, durchaus mäßig und erreicht je Kubikmeter Reaktionsplasma bei 100 atm. Druck kaum 10^4 kcal m^{-3} sec $^{-1}$ für die wirtschaftlich greifbaren Kerntreibstoffe und etwa 10 mal mehr für die Tritiumverbrennung, gegenüber den bekannten Feuerraumbelastungen bis zu 10^6 kcal m^{-3} sec $^{-1}$ chemischer Raketen.

Hier stoßen wir auf die erste grundsätzliche Schwierigkeit stationärer thermischer Kernverbrennung, die geringe Ausbrandgeschwindigkeit und Feuerraumbelastung.

Wir haben uns bisher auf die quantitativen Energieproduktionen bei den jeweiligen Optimaltemperaturen beschränkt und wollen nun noch die Abhängigkeit von der Temperatur zahlenmäßig untersuchen.

In Abb. 3 sind die Energieraten je Dichteneinheit der in Tab. 1 behandelten Kernreaktionen über der Plasmatemperatur T aufgetragen nach Gl. (3). Wie

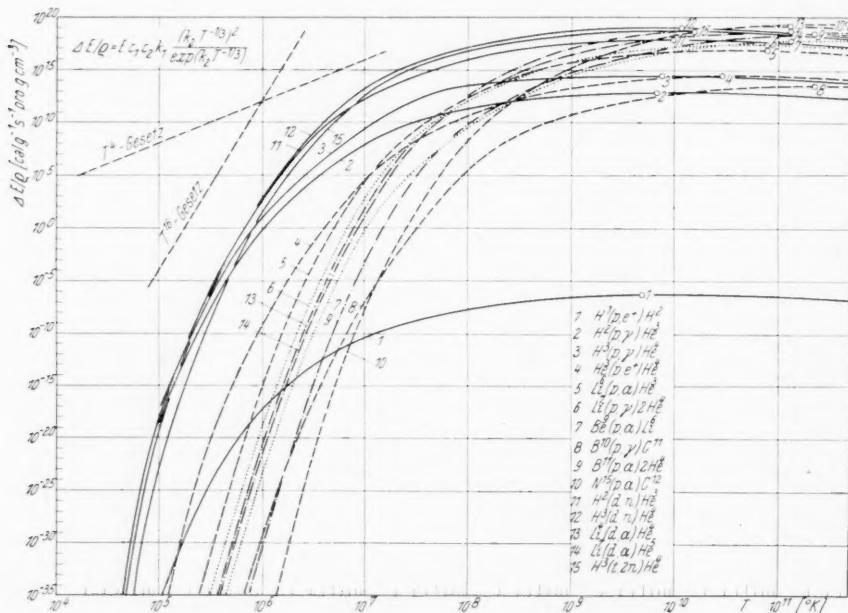


Abb. 3. Energieproduktion pro Masseneinheit stöchiometrischer thermischer Kernverbrennungen bei konstanter Plasmadichte, $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$
[In Reaktionsgleichung (13) lies Li^6 statt Li^4].

schon betont, ist wegen des Einflusses der freien Weglänge auf die sekundliche Stoßzahl die Energierate je Masseneinheit proportional der Dichte.

Die günstigsten Temperaturen für die Energieproduktion liegen, wie wir schon in Tab. 1 fanden, bei konstanter Dichte durchwegs zwischen etwa 10^9 und 10^{12} Grad, mit der Kernladungszahl der Reaktionspartner ansteigend, und unabhängig vom angewendeten Plasmadruck.

Die Höhenlage der Produktionskurven ist im wesentlichen durch k_1 oder durch den maximalen Reaktionsquerschnitt σ_{max} nach Gl. (I c) bestimmt, und

durch E , ϱ , c_1 und c_2 ; für die (ϕ, a) -, (ϕ, n) -, (d, a) -, (d, n) -, (t, n) -, (n, a) -Prozesse also hauptsächlich durch die Energieproduktion bei jener Temperatur, wo die häufigste Geschwindigkeit in der MAXWELL-Verteilung ausreicht, um den COULOMBSchen Potentialwall immer zu durchdringen, und wo in manchen Fällen der Reaktionsquerschnitt größer als der Streuquerschnitt wird.

Ein Beispiel für das erheblich ungünstigere Verhalten mancher (ϕ, β) -Reaktionen ist die eingezeichnete Proton-Proton-Reaktion mit ihrem extrem kleinen Wirkungsquerschnitt.

Bei noch höheren Temperaturen sinkt die Aufenthaltsdauer der stoßenden Partikel im getroffenen Kern und damit der Wirkungsquerschnitt wieder ab, so daß die Produktionskurven das diskutierte Maximum durchlaufen.

Die Neigung der Energieproduktionskurven ist dagegen durch

$$k_2 = 42,7 (Z_1 Z_2)^{2/3} [A_1 A_2 / (A_1 + A_2)^{1/3}]$$

bestimmt, also durch Kernladungs- und Atomgewichts-Zahlen der Reaktionspartner. Daher beobachten wir in Abb. 3 steileren Abfall bei großen k_2 , das heißt insbesondere bei größeren und unter einander ähnlichen Kernladungszahlen.

Dieser Umstand bewirkt beispielsweise, daß die Energierate der in kälteren Sternen bevorzugten Wasserstoff-Reaktionskette bei 2 bis $6 \cdot 10^7$ °K proportional T^4 ist, dagegen jene des in heißeren Sternen bevorzugten Kohlenstoff-Stickstoff-Reaktionskreises proportional T^{16} , wie man auch aus Abb. 3 ablesen kann.

k_2 bestimmt somit bei niedrigen Temperaturen die Energieproduktion überwiegendst, so daß Stoffe mit kleinem k_2 (wie Wasserstoffe) bei niedrigen Temperaturen relativ am schnellsten brennen.

Die in weiten Temperaturbereichen absolut schnellsten Reaktionen sind jene zwischen Deuterium und Tritium, sowohl untereinander als auch je für sich und mit gewöhnlichem Wasserstoff. Erst bei extrem hohen Temperaturen werden schwerere Elemente noch etwas schneller.

Die in Abb. 3 dargestellten Zahlenwerte gelten für stöchiometrische Gemische nackter Atomkerne, für die also immer $c_1 + c_2 = 1$ ist.

Das heißt sie gelten für den ersten Augenblick der im Frischgas von der Temperatur T einsetzenden Reaktion, während mit fortschreitendem Ausbrand natürlich die c_1 und c_2 und damit auch die zeitliche Energieproduktion absinken.

Die Bedingung $c_1 + c_2 = 1$ ist aber auch im ersten Augenblick nur bei voller Ionisierung aller Reaktionspartner erfüllt, das heißt nie vollständig, jedenfalls aber um so weniger, je niedriger die Plasmatemperatur T liegt, wodurch die unteren Äste der Energieratenkurven in Abb. 3 noch merkbar ungünstiger werden können.

Bei den hier besonders interessierenden Temperaturen über 10^7 °K sind für die leichten Elemente die Anteile nicht vollionisierter und daher nicht reaktionsfähiger Partikel allerdings meist schon vernachlässigbar klein, kleiner jedenfalls, als dies aus Gründen der freien Weglängen der Ruhemassenpartikel überhaupt wünschenswert ist.

Schließlich sei nochmals daran erinnert, daß Abb. 3 für feste Feuergasdichten gezeichnet ist, zur Vereinfachung der Umrechnungen für die Dichte $\varrho = 1$ g/cm³.

Zu dieser Dichte würde beispielsweise für das Deuton-Deuton-Frischgas von 10^8 °K ein Druck von $4,22 \cdot 10^9$ atm. gehören, das heißt man muß den Energieratenwert der Abb. 3 in diesem Fall um etwa neun Zehnerpotenzen vermindern, um bei stationären, technisch beherrschbaren Druckverhältnissen zu bleiben.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse bei technischen, stationären Kernfeuerungen ist deshalb abschließend in Abb. 4 die Energierate je Volumseinheit nach Gl. (12) für alle bisher betrachteten Reaktionen nochmals über der Plasmatemperatur aufgetragen.

Man erhält die Zahlenwerte für die Druckeinheit in Atmosphären aus jenen der Abb. 3 durch Multiplikation mit dem Faktor

$$\frac{\Delta E''/\dot{p}^2}{\Delta E/\rho} = \left(\frac{0,981 \cdot 10^6 M}{k T \sum c_i / A_i} \right)^2. \quad (13)$$

Die Maxima der Energieproduktionskurven je Volumseinheit sind wesentlich schärfere als jene pro Masseneinheit, die Unterschiede zwischen den einzelnen Stoffen werden größer, da das Molekulargewicht nochmals quadratisch eingeht.

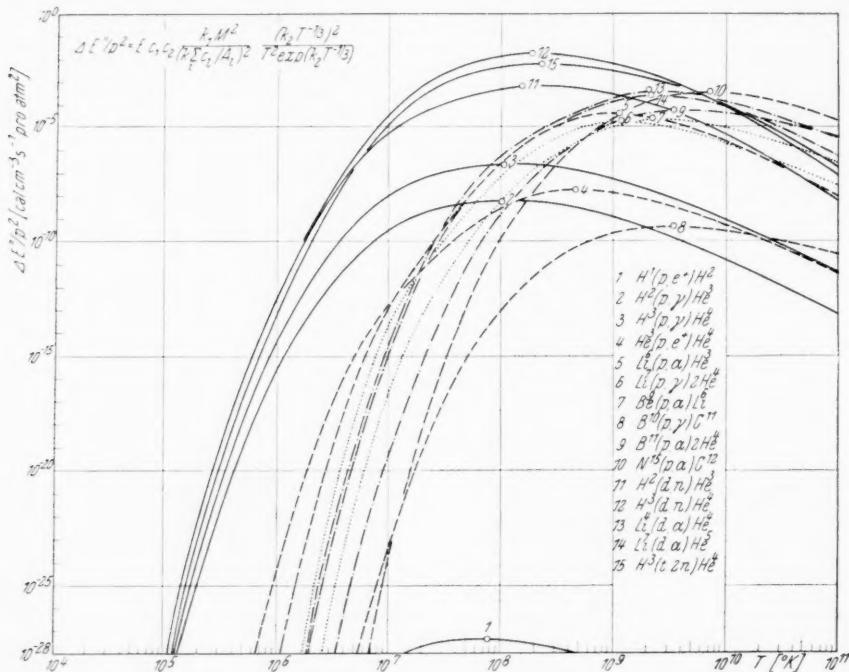


Abb. 4. Energieproduktion stöchiometrischer thermischer Kernverbrennungen je Volumseinheit bei konstantem Plasmadruck, $p = 1$ at.
 [In Reaktionsgleichung (13) lies Li^6 statt Li^4 .]

Trotzdem bleibt die Überlegenheit der schweren Wasserstoffe sehr deutlich, wieder sind die Reaktionen des Deuteriums und Tritiums die weitaus schnellsten. Hier treten auch die charakteristischen Unterschiede und Schwierigkeiten der technischen gegenüber den kosmischen stationären Kernverbrennungen deutlich hervor, die in den rund fünfzehn Zehnerpotenzen geringeren Drücken und kürzeren verfügbaren Zeiten technischer Verbrennungen begründet sind, und die bei letzteren die Anwendung höherer Temperaturen erforderlich machen, als sie selbst die Natur in den Mittelpunkten normaler Sterne benutzt.

Nur bei diesen Optimaltemperaturen und zugleich bei höchstmöglichen, technisch herstellbaren Drücken wird die Halbwertszeit des Ausbrandes und damit die Feuerraumbelastung von ähnlicher Größenordnung wie bei chemischen Feuerungen.

IV. Ausstrahlung

Wir haben eingangs festgestellt, daß jedes völlig wärmgedicht abgeschlossene Gas mit der Zeit exponentiell zunehmende Zahlen thermischer Kernreaktionen erfährt, so daß in diesem Fall also die Zündtemperatur beliebig tief läge.

Unter tatsächlichen, technischen Verhältnissen wird die Kernzündtemperatur daher vom Verhältnis der Energieproduktion im Gasvolumen zur gleichzeitigen Wärmeabgabe nach außen abhängen.

Sobald dieses Verhältnis dauernd größer als eins wird, steigt die Temperatur ebenfalls von selbst weiter, es tritt „Zündung“ ein.

Die Energieausstrahlung kann grundsätzlich sowohl durch abdiffundierende Ruhemassenpartikel, wie durch abdiffundierende Photonen erfolgen, wobei das Verhältnis der geometrischen Abmessungen des Reaktionsplasmas zu den mittleren freien Weglängen der genannten Partikelarten eine wesentliche Rolle spielen wird.

Damit berühren wir die zweite grundsätzliche Schwierigkeit der technischen stationären Kernverbrennungen gegenüber den kosmischen stationären Kernverbrennungen.

Die mittlere freie Weglänge der Ruhemassenpartikel

$$A = \frac{0,177}{n \sigma_s} \quad (14)$$

(worin $n = \rho/k T$ die Zahl der Partikel pro cm^3 , und σ_s der Streuquerschnitt in cm^2 sind)

folgt für die günstigste Reaktionstemperatur $T \sim 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ unserer guten Kernbrennstoffe bei 1 atm. Feuerdruck mit $n = 7,13 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ zu $A_1 = 2,5 \cdot 10^1 \text{ cm}$, wenn nichtvollionisierte Partikel von $\sigma_{s1} \sim 10^{-16} \text{ cm}^2$ vorliegen, und $A_2 = 2,5 \cdot 10^9 \text{ cm}$, wenn nur vollionisierte Partikel von $\sigma_{s2} \sim 10^{-24} \text{ cm}^2$ vorliegen.

Die entsprechenden sekundlichen Stoßzahlen eines Partikels folgen aus

$$Z = \sqrt{\frac{8 k T \sum_i c_i / A_i}{\pi M A^2}}, \quad (15)$$

für das Deuterium-Deuterium-Frischgas zu

$$Z_1 = 4,11 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1} \text{ atm}^{-1}, \text{ bzw. } Z_2 = 4,11 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ atm}^{-1}.$$

Tatsächlich besteht das Reaktionsplasma immer aus Gemischen beider Partikelarten, so daß die tatsächliche freie Weglänge A zwischen den beiden Extremen A_1 und A_2 liegen wird, zu

$$A \sim \frac{0,177}{n_1 \sigma_{s1} + n_2 \sigma_{s2}} \sim \frac{0,177}{n \sigma_{s1}} \frac{1 + n_1/n_2}{10^{-8} + n_1/n_2} \quad (16)$$

das heißt schon bei Anteilen $n_1/n_2 > 10^{-3}$ nichtvollionisierter Partikel wird die mittlere freie Weglänge A zeitweilig proportional n_2/n_1 , also bei Anteilen, wie sie als natürliche Verunreinigungen der Treibstoffe mit schwereren und daher nichtvollionisierenden Elementen jedenfalls unvermeidlich sind, wie sie aber auch in reinsten Wasserstoffen infolge des statistischen Ionisationsvorganges noch bestehen bleiben.

Man wird die mittlere freie Weglänge im Reaktionsplasma daher nicht größer als etwa

$$A = \frac{0,177 \cdot 10^{16}}{n} \frac{1 + n_1/n_2}{n_1/n_2} \quad (14 \text{ a})$$

zu fürchten brauchen, und wenn die geometrischen Abmessungen r des Volumens des Reaktionsplasmas groß gegen diese freie Weglänge sind, wird die Zahl der abdiffundierenden Ruhemassenpartikel innerhalb der Ausbrennzeit des Plasmas klein bleiben.

Immerhin wird das Produkt ρr des Feuergaskörpers mindestens von der Größenordnung $\rho r \sim 100 \rho A \sim 2,5 \cdot 10^3 \frac{1+n_1/n_2}{n_1/n_2}$ atm. cm, also für $n_1/n_2 = 10^{-3}$ gleich $\rho r \geq 2,5 \cdot 10^6$ atm. cm (17)

sein müssen.

Noch wesentlich ungünstiger liegen die Verhältnisse für abdiffundierende Partikel ohne Ruhemassen, also Photonen.

Die optischen Wirkungsquerschnitte der Kerne liegen bei 10^{-30} bis 10^{-40} cm², gegenüber den Streuquerschnitten derselben und der Elektronen von der Größenordnung 10^{-24} cm², das heißt schon im vollionisierten Reaktionsplasma wäre die freie Weglänge der Photonengaskomponente um viele Ordnungen größer als jene der Gaskomponente aus Ruhemassenpartikeln.

Ähnlich bleibt dieses Verhältnis im nicht vollionisierten Plasma.

Aus einem Gasvolumen, dessen geometrische Abmessungen groß gegen die mittlere freie Weglänge seiner Ruhemassenpartikel sind, werden daher immer bevorzugt Photonen abdiffundieren; es verliert Energie überwiegend durch optische Ausstrahlung, wenn die Dichte der Photonenkomponente des Gases von merkbarer Höhe ist.

Bei den vorliegenden hohen Plasmatemperaturen ist die Zahl der Prozesse, die zur Dissoziation der Ruhemassenpartikel in Photonen, also zur Photenerzeugung führen, sehr hoch.

Ohne hier näher auf sie eingehen zu können, seien nur Kernstrahlung, Bremsstrahlung, Rekombinationsstrahlung, Termstrahlung nicht vollionisierter Atome, Massenzerstrahlung, Plasmaschwingungen, Stoßverbreiterung usw. genannt, so daß die Ausstrahlung praktisch kontinuierlich sein wird.

Wären die Abmessungen des — z. B. kugelförmigen — Plasmavolumens auch groß gegenüber der freien Weglänge des Photonengases, so läge Gleichgewichtsstrahlung vor und es gälen die Gesetze der schwarzen Strahlung.

Die Energieabstrahlung würde in bekannter Weise proportional der Oberfläche des Plasmavolumens und der vierten Potenz der Plasmatemperatur.

Die Energieproduktion ist dagegen nach Gl. (12) proportional dem Inhalt des Plasmavolumens.

Setzt man beide gleich, so ergibt sich eine Beziehung für die Zündtemperatur, bzw. für die stationäre Temperatur in Abhängigkeit vom Radius r der Plasmakugel, wenn man den Plasmadruck p konstant hält, zu

$$r = 3 a T^6 \frac{\exp(k_2 T^{-1/3})}{(k_2 T^{-1/3})^2} \frac{(k \sum_i c_i / A_i)^2}{M^2 E c_1 c_2 p^2 k_1}, \quad (18)$$

worin $a = 5,68 \cdot 10^{-5}$ erg cm⁻² grad⁻⁴ sec⁻¹ die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante ist.

Der Plasmradius hat ein Minimum etwa dort, wo in Abb. 4 die Tangente des T^4 -Gesetzes die Energieratenkurven berührt, das ist für die Deuton-Deuton-Reaktion bei fast 10^7 °K. Die Größe dieses Minimalradius beträgt in diesem Fall und bei 100 atm. Plasmadruck etwa $r \sim 10^{17}$ cm, ist also von astronomischer Größenordnung.

Bei einer Ruhemassenpartikelzahl von $n \sim 10^{16}$ cm⁻³ und einem optischen Wirkungsquerschnitt von $\sigma \sim 10^{-33}$ cm² wird die freie Weglänge des Photonen-

gases $A = 0,177/n\sigma$ oder die optisch unendliche Schichtdicke im Plasma $r_\infty \sim 4,6/n\sigma$ von der Ordnung 10^{17} cm, das heißt in stationären Plasmen technischer Abmessungen kann trotz der kontinuierlichen Ausstrahlung keine Schwarzsstrahlung auftreten, da die hierzu notwendigen optisch unendlichen Schichtdicken nicht erreicht werden.

Man wird in diesem Fall indes näherungsweise mit Graustrahlung rechnen dürfen, deren Intensitätsverhältnis zur Schwarzsstrahlung durch die Beziehung

$$I/I_0 = 1 - e^{-r n \sigma} \sim r n \sigma \quad (19)$$

gegeben ist.

Die Abhängigkeit des optischen Wirkungsquerschnittes σ von ϱ und T in der Absorptionskonstanten $n\sigma$ nehmen wir in Ermangelung besserer Unterlagen näherungsweise wie für das Plasma des Sonneninnern nach KRAMERS, EDDINGTON und GAUST [2] an zu:

$$\begin{aligned} \sigma &\sim 6,60 (1 + c_H) (1 - c_H - c_{He}) \frac{\sum_i c_i Z_i^2 / A_i}{\sum_i c_i / A_i} \varrho^{0,75} T^{-3,5} = \\ &= 6,60 (1 + c_H) (1 - c_H - c_{He}) \frac{\sum_i c_i Z_i^2 / A_i}{(k/M \cdot \sum_i c_i / A_i)^{1,75}} \dot{p}^{1,75} T^{-1,25}, \end{aligned} \quad (20)$$

so daß die Ausstrahlungsintensität des Plasmas folgt zu:

$$I \sim I_0 r n \sigma = 3,97 \cdot 10^{24} a r (1 + c_H) (1 - c_H - c_{He}) \frac{\sum_i c_i Z_i^2 / A_i}{(k/M \cdot \sum_i c_i / A_i)^{1,75}} \dot{p}^{1,75} T^{-1,25}. \quad (21)$$

Man kommt also bei konstantem Plasmadruck zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß die Strahlungsintensität mit steigender Temperatur vorübergehend abfällt, und zwar sogar etwas stärker als die Plasmadichte, bis bei noch höheren Temperaturen mit dem Einsetzen intensiver Bremsstrahlung, Massenzerstrahlung und schließlich dem Zerfließen der Grenzen zwischen Materie und Energie die Strahlungsintensität wieder stark ansteigt.

Aus den Gl. (12) und (21) folgt nun das sehr wichtige Verhältnis der Energieausstrahlung zur Energieproduktion für eine Plasmakugel vom Radius r zu:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{4 r^2 \pi I}{4/3 \cdot r^3 \pi A E''} = 3 n \sigma I_0 / A E'' = \frac{1,192 \cdot 10^{25} a (1 + c_H) (1 - c_H - c_{He})}{E c_1 c_2 k_1 k_2^2} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{k}{M} \sum_i c_i / A_i \right)^{0,25} \sum_i c_i Z_i^2 / A_i \cdot \dot{p}^{-0,25} T^{1,417} \exp(k_2 T^{-1/3}), \end{aligned} \quad (22)$$

also unabhängig von den Abmessungen r des Reaktionsplasmas, wenig abhängig vom Plasmadruck \dot{p} und im wesentlichen durch die Temperatur T bestimmt.

Das Ausstrahlungsverhältnis ζ hat bei festgehaltenem Druck \dot{p} über der Temperatur T daher ein Minimum bei

$$T = \left(\frac{k_2}{4,251} \right)^3, \quad (22a)$$

dessen Lage wieder unabhängig vom Druck ist und etwas oberhalb der Optimaltemperatur der Energieproduktion nach Gl. (12a) bleibt.

Die Größe des minimalen Ausstrahlungsverhältnisses beträgt dort

$$\zeta_{min} = \frac{1,77 \cdot 10^{24} a (1 + c_H) (1 - c_H - c_{He})}{E c_1 c_2 k_1 k_2^{-2,251}} \sum_i c_i Z_i^2 / A_i \left(\frac{k}{M} \sum_i c_i / A_i \right)^{0,25} \cdot \dot{p}^{-0,25}. \quad (22b)$$

Die KRAMERSSche Beziehung Gl. (20) setzt — vielleicht etwas optimistisch — voraus, daß Plasmen, die nur aus völlig ionisierten Partikeln, wie Wasserstoff und Helium, bestehen, nicht strahlen, so daß wir die tatsächliche Strahlung auf die unvermeidlichen technischen Verunreinigungen der Kerntreibstoffe mit schwereren Elementen, bzw. auf den nach Gl. (16) zur Begrenzung der freien Weglängen notwendigen Anteil von 10^{-3} nicht vollionisierter Partikel beschränken können.

Damit wird in den vorstehenden Gleichungen der Faktor $(1 - c_H - c_{He}) = 10^{-3}$. Unter anderem mit dieser etwas willkürlich gewählten Zahl ist in Abb. 5 mittels

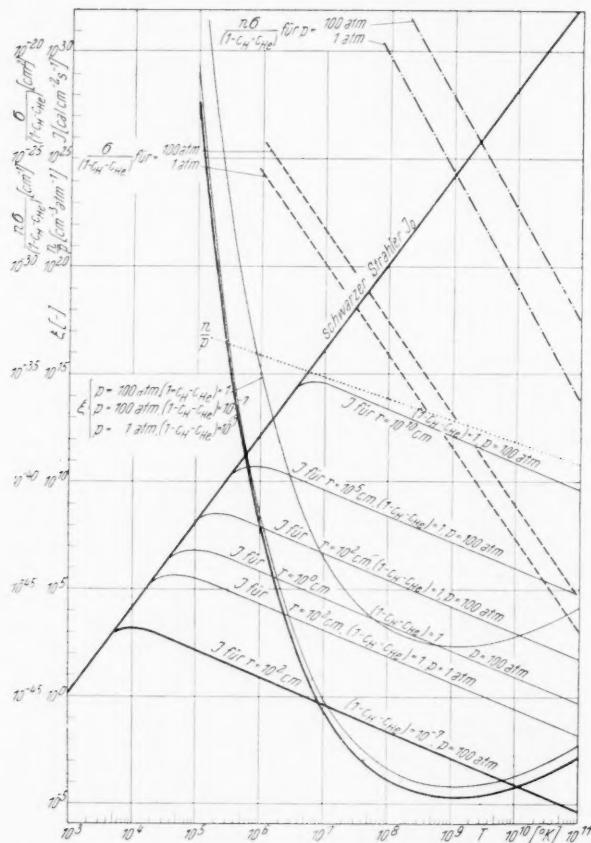


Abb. 5. Strahlung des Kernverbrennungs-Plasmas.

Gl. (22) das Ausstrahlungsverhältnis ζ , mittels Gl. (20) der optische Wirkungsquerschnitt σ und mittels Gl. (21) die absolute Ausstrahlungsintensität I aufgetragen für das Deuterium-Deuterium-Plasma von 100 atm. Druck, wobei für die Berechnung von I der Radius der Plasmakugel zu $r = 1 \text{ m}$ angenommen wurde.

Die Auftragung der Partikelzahl n pro cm^3 und pro atm. Druck über der Temperatur zeigt zunächst, daß es sich bei den Kernreaktionsplasmen durchwegs um Gasdichten handelt, die man sonst als Hochvakuum bezeichnen würde.

Vol.
1
1955

Die weitere Auftragung der optischen Wirkungsquerschnitte σ (bezogen auf die relative Massenkonzentration der Partikel, die weder Wasserstoffe noch Heliumarten sind) zeigt den außerordentlich starken Abfall dieser durchschnittlichen optischen Wirkungsquerschnitte mit wachsender Temperatur, und ihre verhältnismäßig geringe Abhängigkeit vom Druck. In der Gegend der günstigsten Reaktionstemperaturen guter Kerntreibstoffe liegt σ bei etwa 10^{-33} cm^2 . Entsprechend fällt auch die optische Absorptionskonstante $n\sigma$ etwa mit $T^{-5,25}$ und hat zur Folge, daß die eingetragenen absoluten Ausstrahlungsintensitäten I etwa mit $T^{-1,25}$ sinken, sobald die optischen Schichtdicken $r n \sigma < 4,6$ werden. Für $r n \sigma > 4,6$ gilt dagegen praktisch die Intensität schwarzer Strahlung, die als Asymptote aller Strahlungskurven ebenfalls eingezeichnet ist.

Schließlich zeigt die wichtigste Auftragung des Ausstrahlungsverhältnisses ζ , daß unter stationären technischen Bedingungen bei Temperaturen unter etwa 10^7 Grad die Ausstrahlung immer größer als die Energieproduktion bleibt, also unterhalb dieser Temperatur keinerlei Hoffnung besteht, eine stationäre Kernverbrennung zu zünden, bzw. zu betreiben. Bei höheren Temperaturen kann die Energieproduktion größer als die Ausstrahlung werden, wenn der Anteil schwerer oder nicht vollionisierter Partikel im Plasma ausreichend gering, etwa von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-7} ist.

Die in Abb. 5 für abweichende Verhältnisse von p, r und $(1 - c_H - c_{He})$ noch eingetragenen Kurven bedürfen keiner näheren Erläuterung, vervollständigen jedoch die Übersicht über die Ausstrahlungsverhältnisse stationärer technischer Kernbrandplasmen wesentlich.

Man erkennt aus diesen grundsätzlichen Überlegungen, wie mit abnehmendem Gehalt des Plasmas an nichtvollionisierten Partikeln einerseits die Ausstrahlung von Photonen rasch abnimmt, andererseits aber die Ausstrahlung von Ruhemassenpartikeln anwächst, so daß ein Minimum der Energieabgabe über dem Gehalt an nichtvollionisierten Partikeln entsteht.

Damit sind die Bedingungen wenigstens näherungsweise umrissen, unter denen es sich vermeiden läßt, daß die Energieproduktion der Kernverbrennung von vornherein an die Umgebung verloren geht, statt zur Gemischaufbereitung des Frischgases verfügbar zu sein, was offenbar eine wesentliche Voraussetzung stationären Kernbrandes ist.

V. Gemischaufbereitung

Die Gemischaufbereitung in stationären Kernfeuerungen umfaßt dieselben Phasen wie jene in chemischen Feuerungen [3], insbesondere die Treibstoffeinspritzung, den Strahlzerfall, die Tröpfchenbildung, die Tröpfchenverdampfung, die Makromischung, die Mikromischung, die Aufheizung bis zur Zündung und schließlich die Zündung selbst.

Wir beschränken uns indes hier auf den wegen seiner außerordentlichen Energieaufnahme besonders wichtigen Teilprozeß der Aufheizung bis zur Zündung, der hier auch die gesamten Ionisierungsvorgänge der Frischgase mitumfaßt, da bei Kernreaktionen die Zündtemperatur über der Ionisierungstemperatur liegt.

Wie schon mehrfach erwähnt, finden, ebenso wie chemische, auch kernchemische Reaktionen in jedem Gas unserer Umgebung und insbesondere in den Feuergasen unserer Strahltriebwerke dauernd statt, wenn auch so selten, daß sie sich der Beobachtung meist entziehen und energetisch ohne Bedeutung sind.

Die größte Mehrzahl von Zusammenstößen der Gaspartikel infolge ihrer thermischen Bewegung berührt nur die Elektronenhüllen der kollidierenden Atome, ohne daß es überhaupt zu Stößen zwischen Kernen unmittelbar kommt.

Diese erste Voraussetzung thermischer Kernreaktionen wird überwiegend erst bei so hohen Feuergastemperaturen erfüllt, daß die Mehrzahl der Gasatome vollionisiert, also von ihrer Elektronenhülle vollständig befreit ist.

Untersuchungen bei so hohen Feuergastemperaturen, insbesondere über Elektronen, müßten streng genommen schon mit den Methoden der relativistischen Thermodynamik vorgenommen werden, doch begnügen wir uns hier zunächst mit einigen Näherungsbetrachtungen auf der Grundlage der klassischen Thermodynamik.

Nach Tab. 1 liegen die Halbwertszeiten des Ausbrandes der schnellsten Kernreaktionen bei 100 atm. Feuergasdruck um etwa 10^{-3} sec oder 10^6 sekundlichen Stößen einer Feuergasparkel.

Die Einstellung des Ionisationsgleichgewichtes zwischen der im ersten Augenblick infolge der gegenseitigen Atomstöße eintretenden primären spontanen Stoßionisation, der Beteiligung der dabei gebildeten Ionen und Elektronen an der weiteren, sekundären Stoßionisation, der Regeneration des beim primären Vorgang verbrauchten schnellen Endes der MAXWELL-Verteilung und der dadurch bewirkten zusätzlichen Ionisierung und der anwachsenden Rekombination, die wieder vermindernd auf den Ionisationsgrad wirkt, das Einspielen der Gleichgewichte zwischen all diesen Vorgängen erfordert erfahrungsgemäß etwa 10^9 Stöße, das heißt dieses Gleichgewicht wird sich während des Ausbrandes schneller kernchemischer Feuerungen ebensowenig einstellen, wie es dies erfahrungsgemäß in chemischen Feuerungen nicht tut.

Wir werden daher während schneller Kernverbrennungen nicht mit jenem druckabhängigen Ionisationsgleichgewicht rechnen dürfen, wie es beispielsweise die EGGERT-SAHA-Gleichung zu beschreiben versucht, und wie es beispielsweise in den langsam brennenden Plasmen der kosmischen Kernverbrennungen wirklich besteht.

Wir werden während eines wesentlichen Teiles des Ausbrandes in der Hauptsache nur mit der druckunabhängigen primären Spontanionisation rechnen dürfen, die je nach dem vorliegenden Feuergasdruck zu geringeren, gleichen oder auch höheren Ionisationsgraden führen kann als das druckabhängige Ionisationsgleichgewicht, und die wir näher betrachten wollen.

Stoßionisierung ist bei thermischen Stößen zwischen Stoßpartnern verschiedener Masse $A_1 M$ und $A_2 M$ dann zu erwarten, wenn die beim plastischen Stoß im Stoßsystem verschwindende Energie $A_1 A_2 / (A_1 + A_2) \cdot M w^2 / 2 = A M w^2 / 2$ gleich der Ionisierungsenergie I ist.

Für die im Mittel zur Ionisierung notwendige Stoßgeschwindigkeit w_i folgt daraus:

$$w_i = \sqrt{2 I / A M} \quad (23)$$

Im Falle gleicher Massen der Stoßpartner heißt dies bekanntlich, daß die relative kinetische Energie eines Partners $A_1 M w^2 / 2$ im Mittel wenigstens doppelt so groß sein muß wie die im Stoßsystem verschwindende Ionisierungsenergie, so daß die übrigbleibende Hälfte der kinetischen Anfangsenergie noch die Forderungen des Impulssatzes zu erfüllen vermag.

Innerhalb der MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung der thermischen Partikelgeschwindigkeiten muß also wenigstens die häufigste Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{2 k T (\sum_i c_i / A_i) / M} \quad (24)$$

den geforderten Stoßgeschwindigkeitswert w_i erreichen, woraus die notwendige Gastemperatur zur überwiegenden Vollionisierung folgt zu:

Vol.
1
1955

$$T = \frac{I}{k A \sum_i c_i / A_i} \quad (25)$$

Die zur Vollionisierung eines Atoms erforderliche Energie I hängt von der Kernladungszahl Z etwa nach der Beziehung ab:

$$I = 2,18 \cdot 10^{-11} Z^{2,418} \text{ [erg].} \quad (26)$$

Setzt man dies in Gl. (25) ein, so folgt endlich:

$$T = \frac{2,18 \cdot 10^{-11} \sum_i c_i Z_i^{2,418}}{k A \sum_i c_i / A_i} \quad (27)$$

Unterhalb von $3 \cdot 10^5$ °K Gastemperatur wird also auch aus Ionisationsgründen von vornherein von keinem Gas, auch von keiner Art des Wasserstoffes, eine technisch interessierende Reaktionsausbeute zu erwarten sein, wenn es sich um raschablaufende, kurzzeitige Verbrennungsvorgänge handelt.

Bei der Temperatur der Mittelpunkte normaler Sterne von 2 bis $6 \cdot 10^7$ Grad können nur die ersten acht Elemente des periodischen Systems bis etwa zum Sauerstoff für thermische Kernreaktionen überhaupt in Frage kommen, eine Auswahl, die bekanntlich in ganz ähnlicher Weise auch für die chemischen Reaktionen in chemischen Raketen gilt.

Unterhalb der durch Gl. (27) dargestellten Vollionisierungstemperaturen können immer nur kleine Bruchteile der Gasmasse an den Kernreaktionen teilnehmen, die nach Maßgabe der MAXWELL-Verteilungskurve um so kleiner werden, je weiter sich die tatsächlichen Gastemperaturen nach unten von den Werten der Gl. (27) entfernen.

Der zahlenmäßige Anteil der Gasteilchen N'/N , die schneller sind als w_i , von denen also Vollionisation spontan zu erwarten ist, beträgt etwa:

$$N'/N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{E}{kT}} e^{-E/kT} + \int_{x=\sqrt{E/kT}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{w_i}{c} e^{-(w_i/c)^2} + \int_{x=w_i/c}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]. \quad (28)$$

Nach der näherungsweisen, nichtrelativistischen Schreibweise wird $N'/N = 1$ also nur für $c = \infty$, also unendlich hohe Temperatur erreicht.

Für $w_i/c = 1$ folgt $N'/N = 0,58$, das heißt bei den durch Gl. (27) dargestellten Temperaturen erreicht immerhin eine Mehrheit von 58% der Teilchen sofort die zur Vollionisation erforderliche Stoßgeschwindigkeit, bei der halben Temperatur sind es noch 25%, bei $T/4$ noch 4%, bei $T/8$ wesentlich unter 1%.

Der in Abb. 5 geforderte Anteil vollionisierter Partikel von $N'/N = (1 - 10^{-7})$ wird nach Gl. (28) erreicht für eine Temperatur, die etwa 25mal größer ist als jene nach Gl. (27). Erst bei diesen, besonders für schwerere Elemente schon extrem hohen Temperaturen steigt die Totalionisation und sinkt damit die Ausstrahlung soweit ab, daß stationäre Kernverbrennungen möglich werden.

Die nächste Frage betrifft die notwendigen Energien, um das Frischgas auf diese hohen Feuergastemperaturen aufzuheizen.

Wir setzen den Aufheizvorgang zunächst wie üblich als adiabatisch voraus, das heißt sehen von Energieverlusten nach außen infolge abdiffundierender Photonen oder Elektronen oder infolge konvektiver Wärmeübergänge an die Begrenzungswände durch Atom-, Ionen-, Kern-, Elektronen- oder Photonenstöße gegen die Wände ab, wozu wir nach dem vorigen Abschnitt unter bestimmten Bedingungen berechtigt sind.

Diese Voraussetzung wird am ehesten wieder bei sehr rasch verlaufender Aufheizung zutreffen, bei der auch die Partialdrücke der genannten fünf wesentlichsten Feuergaskomponenten keine Zeit zum Einspielen ihrer Gleichgewichte haben.

Trotz dieser vereinfachenden Annahmen ist auch das Problem der Bestimmung der spezifischen Wärmen des Feuergases hier nicht mehr, wie sonst üblich, statischer Natur, vielmehr werden wegen der überwiegenden Bedeutung der Termanregungen und ihrer Lösung die spezifischen Wärmen Funktionen der Zeit.

Der BOLTZMANNSCHE Gleichverteilungssatz — als Folge der klassischen BOLTZMANN-Statistik — hat im Rahmen der Quantentheorie noch die Bedeutung eines Grenzgesetzes, das bei genügend hohen Temperaturen, also unter unseren Verhältnissen, noch gültig ist. Er gilt indes nicht für das Photongas, wo er bekanntlich zu dem nur für große Wellenlängen zutreffenden RAYLEIGH-JEANSSCHEN Strahlungsgesetz führt.

Der BOLTZMANNSCHE Gleichverteilungssatz besagt, daß auf jeden Freiheitsgrad eines mechanischen Systems, dessen Energie quadratisch von der Geschwindigkeit oder Koordinate abhängt, im Mittel die Energie $kT/2$ entfällt.

Die mittlere Energie eines Gasatoms mit seinen drei räumlichen, translatorischen Freiheitsgraden beträgt daher bekanntlich $3kT/2$.

Wenn einem Atom dieses Energieinhaltes die Ionisationsenergie I_1 zugeführt wird, so spaltet es ein Elektron ab, das sich erfahrungsgemäß nach ganz wenigen Stößen mit dem übrigen Gas ins translatorische Energiegleichgewicht setzt, das heißt sich in die MAXWELL-BOLTZMANN-sche Geschwindigkeitsverteilung einordnet und damit seinerseits den mittleren Energieinhalt $3kT/2$ an-

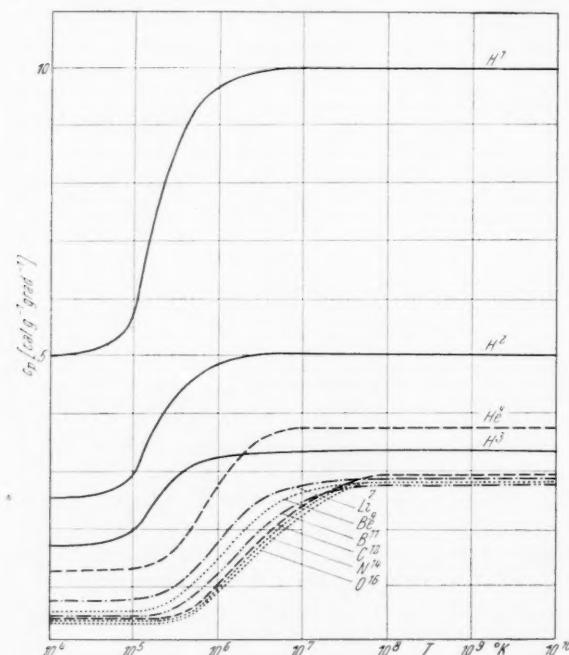


Abb. 6. Mittlere spezifische Wärmen ionisierender Gase bei Kurzzeitvorgängen.

nimmt, so daß, auf das ursprüngliche Atom bezogen, nunmehr eine gesamte Energie von $(3kT/2 + I_1 + 3kT/2)$ bereitgestellt worden sein muß. Ionisiert das Atom mehrfach, z. B. Z -mal, so wächst die insgesamt dafür vorzusehende mittlere Energie auf

$$U_z = 3kT/2 + \sum_1^Z I + 3ZkT/2 = \sum_1^Z I + (Z+1)3kT/2. \quad (29)$$

Die spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck und je Masseneinheit nähert sich daher mit unbegrenzt wachsender Temperatur asymptotisch dem Grenzwert

$$c_p = \sum_i c_i \frac{Z_i + 1}{A_i} \frac{5k}{2M}, \quad (30)$$

während sie für sehr niedrige Temperaturen dem Wert

$$c_p = \sum_i c_i \frac{5k}{A_i 2M} \quad (31)$$

entspricht.

Die Übergangskurve zwischen diesen beiden Werten hängt von der Schnelligkeit der Aufheizung ab, für die hier vorausgesetzte kurzzeitige Aufheizung kann sie mit Hilfe der Gl. (28) für jede Zwischentemperatur angegeben werden. Für mittlere Temperaturen ergibt sich meist ein schwaches, von der Ionisationsarbeit herührendes Maximum der mittleren spezifischen Wärmen, das leicht über dem Grenzwert nach Gl. (30) liegen kann.

Während die Anfangswerte der spezifischen Wärmen je Masseneinheit daher mit steigendem Atomgewicht monoton und hyperbolisch gegen Null absinken, nähern sich die Endwerte bei hohen Temperaturen etwas unregelmäßiger dem endlichen Wert $c_p \sim \sim 2 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad}^{-1}$, da der Wert $(Z+1)/A$ mit wachsendem Atomgewicht gegen 0,4 sinkt.

Stärker nach oben abweichende Endwerte der spezifischen Wärmen zeigen also nur die leichtesten Elemente, insbesondere die Wasserstoffarten, wie Abb. 6 veranschaulicht.

Wenn man übrigens nicht mit Kurzzeitvorgängen rechnet, sondern Einstellung des thermischen Gleichgewichtes annimmt, so bleiben die horizontalen Äste der Kurven der mittleren spezifischen Wärmen unverändert, lediglich der S-förmige Übergangsteil, der die Ionisationsvorgänge widerspiegelt, verschiebt sich in druckabhängiger Weise. Bei den sehr hohen Temperaturen kommt man

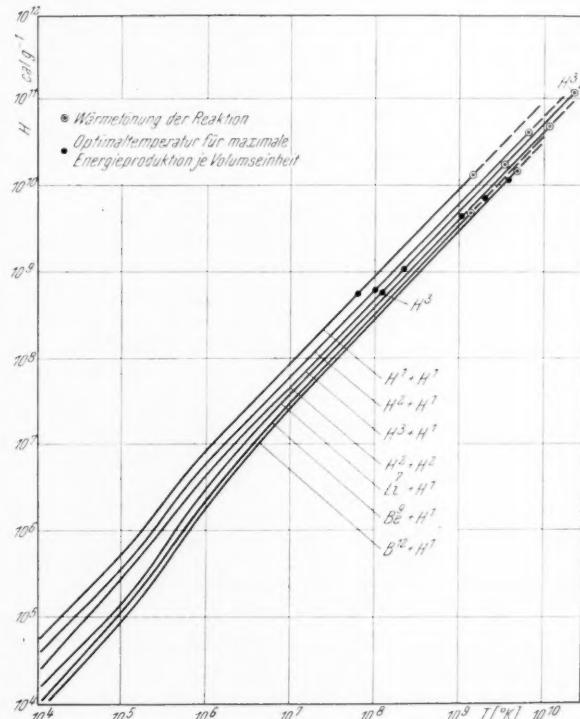


Abb. 7. Enthalpie-Temperatur-Diagramm der stöchiometrischen Frischgase bei Kurzzeitvorgängen, mit Reaktionswärmen und optimalen Verbrennungstemperaturen.

daher auch in diesem Fall zur gleichen Enthalpie wie bei Kurzzeitvorgängen, wenn man von der Termanregung und Ausstrahlung absieht.

Unter diesen Voraussetzungen kann man mit Hilfe der Abb. 6 ein Enthalpie-Temperatur-Diagramm, beispielsweise für stöchiometrische Frischgasgemische, entwerfen, wie dies in Abb. 7 für einige derartige Gemische aus den ersten Elementen des periodischen Systems mit Wasserstoff und Deuterium geschehen ist.

Die Enthalpien sind bis zur jeweiligen Höhe der Wärmetönung der Kernreaktion voll durchgezeichnet, weiterhin gestrichelt. Außerdem sind die optimalen Reaktionstemperaturen nach Spalte 12 von Tab. 1 eingetragen.

Man erkennt, daß die eigenen Reaktionswärmen bei den Wasserstoffen reichlich bis zur Aufheizung auf die besten Reaktionstemperaturen auslangen, daß dies bei Reaktionen schwererer Elemente jedoch nicht immer der Fall ist. Da gerade bei diesen aber auch die Ausstrahlung während der Reaktion wesentlich höher als bei den Wasserstoffen zu werden scheint, steht bei diesen die grundsätzliche Möglichkeit technischer stationärer Kernverbrennungen auch aus diesem Grunde sehr in Frage.

VI. Anwendung in Strahltriebwerken

Aus den bisherigen Untersuchungen, denen zweifellos noch eine Reihe wesentlicher Unsicherheiten anhaften, ergeben sich folgende wichtigste Folgerungen für den Betrieb technischer stationärer Kernfeuerungen:

1. Als Brennstoff scheint in erster Linie Deuterium allerhöchster Reinheit an schwereren Elementen in Frage zu kommen, da dieses besonders die einander oft widersprechenden Forderungen nach geringer Halbwertszeit des Ausbrandes, hoher sekundlicher Energieproduktion je Volumseinheit des Feuerraumes, geringer Strahlungsintensität des Reaktionsplasmas und hoher Wärmetönung im Vergleich zur Enthalpie des Frischgases bei der optimalen Reaktionstemperatur mit wirtschaftlich noch tragbarer Beschaffbarkeit vereinigt.

2. Die Feuerraumbelastung steigt mit dem Quadrat des angewendeten Feuerdruckes, erreicht aber selbst für Feuerdrücke von 100 atm. nur Werte von der Größenordnung $10^4 \text{ kcal m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$, bleibt also geringer als jene chemischer Hochdruckfeuerungen.

3. Die Mindestabmessungen selbst von Höchstdruck-Kernfeuerungen liegen bei vielen Metern, da die mittleren freien Weglängen des Hochdruck-Reaktionsplasmas von Zentimetergröße sind.

4. Bei jeder Abkühlung des ausgebrannten Plasmas wesentlich unter die bei $10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ liegende günstigste Verbrennungstemperatur setzt Rekombinations- und Term-Strahlung von außerordentlicher Intensität ein, die etwa bei $10^5 \text{ }^\circ\text{K}$ zur optischen Ausstrahlung wesentlicher Teile der gesamten Energieproduktion führen kann.

Diese Umstände lassen ortsfeste oder in Schiffen betriebene Kernfeuerungen wesentlich leichter realisierbar erscheinen als solche in Luft- oder Raumfahrzeugen, wobei in ersteren die physikalisch erforderlichen Mindestleistungen von etwa 200 000 PS (bei einigen Milligramm sekundlichem Brennstoffverbrauch) leichter überschritten werden können.

Für Strahltriebwerke hat man drei grundsätzliche Verfahren zur Nutzbarmachung der bei etwa 10^{10} kcal/kg liegenden Feuergasenthalpie ins Auge gefaßt:

1. Ihre unmittelbare Entspannung nach Art der bekannten chemischen Raketen, in den sogenannten *Reinen Atomraketen*. Die Auspuffgeschwindigkeit läge in der Größenordnung 10^7 m/sec , also der spezifische Treibstoffverbrauch

bei 10^{-3} kg/sec ton, so daß auch ein Vielfaches an sekundlich verbrauchtem Schutzgas oder von Schutzflüssigkeiten für die Ofen- und Düsenwände tragbar erscheint. Der Umstand, daß die Entspannung hier rascher vor sich geht als die Ionenrekombination, so daß das gefürchtete Aufleuchten des Reaktionsplasmas bei der Abkühlung sich auf allfällige Mischvorgänge mit dem Schutzgas beschränken könnte und zumindest nicht die gesamte, umgesetzte Plasmamasse erfaßt, dieser Umstand könnte die reinen Atomraketen in einem neuen und technisch nicht völlig hoffnungslosen Licht erscheinen lassen. Die Strahlung des Reaktionsplasmas selbst — nach Abb. 5 bei $1000 \text{ cal/cm}^2\text{sec}$, — dürfte in den Ofenwänden umso mehr beherrschbar sein, als es sich überwiegend um durchdringendes Röntgenlicht handelt.

Das für den konvektiven Wärmeübergang maßgebliche Konvektionsprodukt H_{oc} liegt mit $\sim 4 \cdot 10^{11} \text{ kcal/m}^2 \text{ sec}$ trotz der geringen Gasdichte etwa 10^4 fach höher als in chemischen Hochdruckraketen und läßt keine Aussichten bestehen, die Wärmeübergänge an eine ungeschützte Wand durch einfache Wandkühlung zu beherrschen. Hingegen ergeben sich auch wegen der ungemeinen kinematischen Zähigkeit $c A/3$ der Plasmaströmung und ihrer entsprechend geringen REYNOLDS-Zahl $r/A \sim 10^3$ günstige Perspektiven für die Mischzonen von Schutzgas und Plasma, die eine Zwischenlösung zwischen reiner Atomrakete und thermischer Atomrakete nahelegen, wie sie H. J. KÄPPELER behandelt [4].

2. Das nächste, zur Nutzbarmachung der Keinplasmaenthalpie ins Auge gefaßte Verfahren besteht darin, das heiße Plasma mit der Umgebungsluft (*Atom-Luftstrahltriebwerke*) oder mit anderen inerten Arbeitsgasen (*Thermische Atomraketen*) vollständig zu mischen und diese dadurch auf eine gewünschte, aber nur eine Größenordnung über jener chemischer Triebwerke liegende Temperatur zu erwärmen. Derartige thermische Atomraketen unterscheiden sich offenbar nur gradmäßig von den früher genannten reinen Atomraketen mit Schutzgasanwendung, jedoch würde man bei beiden Zumischungsanwendungen niedrige Plasmadrücke vorziehen, bei denen die Energieproduktion offenbar unzureichend wird. Außerdem muß in beiden Fällen bei der Mischung der Temperaturbereich extrem hoher Strahlungsintensität durchlaufen werden, so daß sich ohne eingehendes Studium dieser Sonderverhältnisse, die von I. SÄNGER-BREDT und von H. J. KÄPPELER [4] in Angriff genommen wurden, keine allgemeinen Schlüsse ziehen lassen.

Immerhin läßt sich sagen, daß die Energieausstrahlung nicht größer als die Energieproduktion werden kann, und das wäre beim Feuerdruck von 10 atm. und bei dem Radius r [m] eines kugelförmigen Ofens etwa $I = 23 r \text{ kcal m}^{-2} \text{ sec}^{-1}$, also auch bei 10 m Ofenradius nicht über $0,023 \text{ kcal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$, also ein technisch gut beherrschbarer Wert, wie er vielleicht auch für ortsfeste Kernfeuerungen von Interesse sein kann.

3. Endlich wurde auch das Verfahren erwogen, die bei den beiden anderen Methoden drohenden hohen Strahlungsintensitäten bei der Abkühlung des Reaktionsplasmas selbst als nützliche Antriebsenergien heranzuziehen (*Photonenraketen*) [5].

Wenn diese Abkühlung des Reaktionsplasmas in einem geschlossenen Raum mit beispielsweise zentraler Reaktionszone und darumliegendem kühlem Gasmantel, also ohne merkbare Gasströmung, erfolgt, dürfte es sich leicht einrichten lassen, daß der überwiegendste Teil der Plasmaenthalpie in Photonengas verwandelt und ausgestrahlt wird.

Die Strahlungsintensität hängt wieder linear vom Lampenradius r [m] und vom Quadrat des Feuerdruckes p [atm.] ab und liegt für die Triton-Deuton-Reaktion vermutlich bei

$$I = 3,7 r \rho^2 \quad [\text{kcal m}^{-2} \text{sec}^{-1}], \quad (32)$$

entsprechend einem Strahlungsdruck von

$$\rho_s = 5,6 \cdot 10^{-10} r \rho^2 \quad [\text{atm.}] \quad (33)$$

Um also Strahlungsdrücke von technisch interessierender Größenordnung, also von wenigstens 0,01 atm. zu erreichen, müßten bei einem Lampenradius von $r = 1 \text{ m}$ die Feuerdrücke $\rho = 4,2 \cdot 10^8 \text{ atm.}$ betragen.

Für Photonenraketen wird man daher, ebenso wie für Atom-Luftstrahltriebwerke, noch nach Energiequellen höherer Reaktionsgeschwindigkeit zu suchen haben, um die technischen Schwierigkeiten zu vermindern.

Literaturverzeichnis

1. G. GAMOW und C. L. CRITCHFIELD, Atomic Nucleus and Nuclear Energy-Sources. Oxford: Clarendon Press, 1950.
2. G. GAMOW und C. L. CRITCHFIELD, l. c., S. 270.
3. E. SÄNGER, Brennstoff-Chem. **32**, 1, 33 (1951); **35**, 41 (1954).
4. I. SÄNGER-BREDT, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.
— H. J. KÄPPELER, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.
5. E. SÄNGER, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.

Vol.
1
1955

Optimal Transfer Between Circular Orbits About Two Planets

By

D. F. Lawden, Birmingham¹, BIS

(With 1 Figure)

(Received January 4, 1955)

Abstract. The general theory of optimal rocket trajectories is modified into a form convenient for dealing with the problem of the mode of transfer of a rocket between circular orbits about two planets which results in a minimum expenditure of fuel. Equations representing the solution in the case of planets moving in coplanar elliptical orbits are derived.

Zusammenfassung. Die allgemeine Theorie optimaler Raketenflugbahnen wird in geeigneter Form abgeändert, um das Problem derjenigen Art des Überganges einer Rakete zwischen Umkreisungsbahnen um zwei Planeten behandeln zu können, durch den der Brennstoffverbrauch ein Minimum wird. Es werden Gleichungen abgeleitet, die eine Lösung für den Fall von Planeten geben, die sich in koplanaren elliptischen Bahnen bewegen.

Résumé. La théorie générale des trajectoires optimum de fusées est modifiée d'une manière pour pouvoir traiter le problème du trafic entre des orbites circulaires autour de deux planètes par une fusée, nécessitant un minimum de combustible. Des équations sont dérivées, qui représentent la solution au cas de planètes se trouvant elles-mêmes sur des orbites elliptiques coplanaires.

I. Introduction

A method of calculating rocket trajectories of minimum fuel expenditure connecting two terminals in a specified gravitational field, which may be variable in time, has been developed by the author in another paper [1]. Theoretically the method is capable of solving the problem of the optimal transfer of a rocket from a circular orbit about one planet into another about a second planet. In such a problem the gravitational field at any point in space is the resultant of the fields due to the planets and the Sun and, on account of the motions of the former bodies, it is variable in time. If, however, employing our method we calculate an optimal trajectory of transfer, the corresponding expenditure of fuel will be a minimum only with respect to neighbouring trajectories and small variations in the instants of departure and of arrival. Thus, if the planets are in certain relative positions at the instant of departure along an optimal trajectory, it is easy to find slightly displaced positions of the planets in their elliptical orbits which these bodies will not occupy simultaneously until a long interval of time has elapsed during which each completes a number of circuits of its orbit. A small variation of the time of departure will therefore be insufficient to cause such a variation in the initial circumstances and the fuel expenditure will not necessarily be a minimum with respect to all small initial displacements of this type.

¹ Department of Physics and Mathematics, College of Technology, Birmingham 1, England.

In fact, our method will yield a large number of "optimal" solutions corresponding to different positions of the planets in their orbits, only one of which is an absolute optimal solution, requiring less expenditure of fuel than for any other pair of initial positions of the planets. We could calculate such a series of "optimal" solutions and then pick out the absolute optimal mode of transfer, but it is clearly desirable to be able to proceed in a more direct manner to this latter mode. It is the object of this paper to describe a modification of our theory which will permit such a direct calculation.

II. Modification of the General Theory

We shall assume two dimensional motion in the plane of rectangular axes Ox, Oy , fixed relative to the Sun. This restriction to plane motion is easily removed by the addition of a third axis Oz and appropriate extension of the results which follow. Let $(-f, -g)$ be the x and y components of the intensity of gravitational attraction acting on the rocket at any instant. This attraction is the resultant of the attractions due to the planets and that due to the Sun. Accordingly we put

$$f = f_0 + f_1 + f_2, \quad g = g_0 + g_1 + g_2, \quad (1)$$

where $(-f_0, -g_0)$ is the attraction due to the planet of departure, $(-f_1, -g_1)$ is that due to the planet of arrival and $(-f_2, -g_2)$ is that due to the Sun. (f_2, g_2) will be functions of the coordinates (x, y) of the rocket only. Let A, B be two fixed reference points on the orbits of the planets of departure and arrival respectively (e.g. A and B may be perihelia). Suppose the planet of departure is at A at time $t = t_0$ and the planet of arrival is at B at time $t = t_1$. Then the position of the first planet in its orbit at any instant t will be a determinate function of $t - t_0$ and hence the intensity of attraction of this planet at any point (x, y) will be a specifiable function of the variables $x, y, t - t_0$. Accordingly we shall take

$$f_0 = f_0(x, y, t - t_0), \quad g_0 = g_0(x, y, t - t_0), \quad (2)$$

f_0 and g_0 being determined as functions of their three variables when the orbit of the planet of departure is known. Similarly we may take

$$f_1 = f_1(x, y, t - t_1), \quad g_1 = g_1(x, y, t - t_1). \quad (3)$$

Thus

$$f = f(x, y, t - t_0, t - t_1), \quad g = g(x, y, t - t_0, t - t_1). \quad (4)$$

We shall suppose that the rocket is in a circular orbit about the planet of departure at $t = t_0$ and is to manoeuvre in such a way that it is in a circular orbit about the other planet at $t = t_1$. The problem is to calculate the optimal manoeuvre resulting in the least expenditure of fuel. It should here be noted that the period of motor thrust does not necessarily commence at $t = t_0$ and the transfer manoeuvre may be completed prior to $t = t_1$. By permitting a variation of the parameters t_0 and t_1 during the minimisation process, we shall ensure minimisation with respect to the positions of the planets in their orbits as was observed to be a requirement in the previous Section.

In [1], we regarded (f, g) as functions of the three variables (x, y, t) only. In this paper they are functions of the five variables (x, y, t, t_0, t_1) . The theory of our original paper on the subject must now be appropriately modified. It was shown in that paper that if the motion of the rocket between the instants $t = t_0$, $t = t_1$ is given by the equations

Vol
1
195

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad t = t(\lambda), \quad (5)$$

where $t = t_0$ when $\lambda = a$ and $t = t_1$ when $\lambda = \beta$, the characteristic velocity of this manoeuvre is I , where

$$I = \int_a^\beta H d\lambda, \quad (6)$$

and H is given by

$$H = t' \{(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2 + \epsilon^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

ϵ tending to zero as a limit. Primes denote differentiations with respect to λ and dots denote differentiations with respect to t . Since $\dot{x} = x'/t'$,

$\ddot{x} = (t' x'' - t'' x')/t'^3$, etc., it is clear that

$$H = H(t, x, y, t', x', y', t'', x'', y'', t_0, t_1). \quad (8)$$

Suppose now that (t_0, t_1) are varied so that the planets are at A and B at the times $(t_0 + \delta t_0, t_1 + \delta t_1)$ respectively, the rocket being assumed to be at the same points in space and proceeding with the same velocities at these instants as it was at the times (t_0, t_1) in the case of the manoeuvre specified by the equations (5). Let the equations

$$x = x(\lambda) + \delta x(\lambda), \quad y = y(\lambda) + \delta y(\lambda), \quad t = t(\lambda) + \delta t(\lambda), \quad (9)$$

specify a neighbouring trajectory of transfer appropriate to these new boundary conditions. Then $\delta t(\lambda) = \delta t_0$, $\delta t(\lambda) = \delta t_1$, when $\lambda = a$, $\lambda = \beta$ respectively and δx , δy , $\delta \dot{x}$, $\delta \dot{y}$ are all zero for these values of λ .

If I changes its value to $I + \delta I$ when this variation is made, it follows from equations (6) and (8) that

$$\delta I = \int_a^\beta \left(\frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y} \delta y + \frac{\partial H}{\partial t'} \delta t' + \dots + \frac{\partial H}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial H}{\partial t_1} \delta t_1 \right) d\lambda, \quad (10)$$

an integral which is identical with the corresponding integral to be found in our previous paper apart from the addition of the two final terms in the integrand involving δt_0 and δt_1 . That part of the integral (10) which can be found in the earlier paper may now be reduced by the method described there to a linear form in the increments δt_0 , δt_1 , and others we have no occasion to mention here, so that equation (10) may be shown to be equivalent to the equation

$$\delta I = -A_0 \delta t_0 + A_1 \delta t_1 + \delta t_0 \int_a^\beta \frac{\partial H}{\partial t_0} d\lambda + \delta t_1 \int_a^\beta \frac{\partial H}{\partial t_1} d\lambda + \dots \quad (11)$$

where

$$A(\lambda) = \frac{\partial H}{\partial t'} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial H}{\partial t''} \right), \quad (12)$$

and

$$A_0 = A(a), \quad A_1 = A(\beta).$$

If the manoeuvre determined by equations (5) is optimal, $\delta I = 0$ for all small independent functions δx , δy , δt and small independent increments δt_0 , δt_1 . The conditions arising from the circumstance that I is stationary with respect to variation of the functions $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $t(\lambda)$ have been given in the earlier paper and will be reiterated below. Equation (11) shows that I is stationary with respect to variations of t_0 and t_1 if

$$-A_0 + \int_a^{\beta} \frac{\partial H}{\partial t_0} dt = A_1 + \int_a^{\beta} \frac{\partial H}{\partial t_1} dt = 0. \quad (13)$$

These conditions replace the conditions $A_0 = A_1 = 0$ of the earlier theory.

We require the limiting form of the conditions (13) as $\varepsilon \rightarrow 0$. As shown in the original paper, the optimal trajectory will comprise a number of arcs of null thrust at the junctions between which impulsive thrusts are applied to the rocket to effect transference from one arc into the succeeding arc. An arc of null thrust will have equations which define a solution of the differential equations

$$\ddot{x} + f = \ddot{y} + g = 0. \quad (14)$$

Let such a solution be $x = X(t)$, $y = Y(t)$. Then, over this arc, we define two functions of t (u, v), called the *primers* [2], to satisfy the equations

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u \frac{\partial f}{\partial X} + v \frac{\partial g}{\partial X} &= 0, \\ \ddot{v} + u \frac{\partial f}{\partial Y} + v \frac{\partial g}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

As explained in the previous paper, we may show that the limiting expression for the quantity A is given by

$$A = u f + v g + \dot{X} \dot{u} + \dot{Y} \dot{v}, \quad (16)$$

from which A_0 and A_1 can be calculated.

From equation (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t_0} &= \frac{(\ddot{x} + f) \frac{\partial f}{\partial t_0} + (\ddot{y} + g) \frac{\partial g}{\partial t_0}}{\{(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2 + \varepsilon^{2\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} t' = \\ &= \frac{(\ddot{x} + f) \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + (\ddot{y} + g) \frac{\partial g_0}{\partial t_0}}{\{(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2 + \varepsilon^{2\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} t'. \end{aligned} \quad (17)$$

It is proved in [1] that, as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{x} + f}{\{(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2 + \varepsilon^{2\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} &\rightarrow u, \\ \frac{\ddot{y} + g}{\{(\ddot{x} + f)^2 + (\ddot{y} + g)^2 + \varepsilon^{2\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} &\rightarrow v. \end{aligned} \quad (18)$$

The limiting form of $\partial H / \partial t_0$ is accordingly

$$\left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) t'. \quad (19)$$

Similarly

$$\frac{\partial H}{\partial t_1} \rightarrow \left(u \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + v \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \right) t'. \quad (20)$$

We can now write down the limiting form of the conditions (13), viz.,

$$\begin{aligned} -A_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) dt &= 0, \\ A_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left(u \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + v \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \right) dt &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Since (f_0, g_0) will be effectively zero over that part of the track not in the immediate vicinity of the planet of departure, the upper limit of the integral appearing in the first of equations (21) can be taken to be any instant after the rocket has receded to a great distance from the planet of departure. A similar remark applies to the lower limit of the integral appearing in the second of equations (21).

In addition to the two new conditions (21), other conditions to be satisfied by an optimal track have been calculated in the previous paper. These are still operative, and, for convenience, are given below:

(1) Immediately before and after an impulsive thrust, the primers (u, v) must represent the direction cosines of the direction of thrust. Thus, in particular, $u^2 + v^2 = 1$ at a junction.

(2) (\dot{u}, \dot{v}) must be continuous across a junction.

(3) A , as given by equation (16), must be continuous across a junction. This condition is equivalent to the assertion that $u\ddot{u} + v\ddot{v} = 0$ at a junction.

Vol.
1
1955

III. Transformation of the New Conditions

Differentiating equation (16) with respect to t , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \dot{u} f + \dot{v} g + u \left(\frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + v \left(\frac{\partial g}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial g}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) + \\ &\quad + \ddot{X}u + \ddot{Y}v + \dot{X}\ddot{u} + \dot{Y}\ddot{v}. \end{aligned} \quad (22)$$

$X(t)$, $Y(t)$ being solutions of the equations (14), we have $\ddot{X} = -f$, $\ddot{Y} = -g$. We can also eliminate \ddot{u} , \ddot{v} from equation (22) by the use of equations (15). The result of this elimination and of \dot{X} and \dot{Y} is

$$\frac{dA}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (23)$$

Integrating with respect to t over the time interval (t_0, t) , we now obtain

$$A - A_0 = \int_{t_0}^t \left(u \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt. \quad (24)$$

Suppose t is taken to be some instant at which the rocket is in its transfer orbit and is being influenced to a negligible extent by the attractions of the two planets. Then $f_1 = g_1 = 0$ throughout the time interval (t_0, t) and hence $f = f_0 + f_2$, $g = g_0 + g_2$ over the interval of integration in equation (24). But (f_2, g_2) are not explicitly dependent on t and hence $\partial f / \partial t = \partial f_0 / \partial t$, $\partial g / \partial t = \partial g_0 / \partial t$. Finally, consideration of equations (2) reveals that $\partial f_0 / \partial t = -\partial f_0 / \partial t_0$ and $\partial g_0 / \partial t = -\partial g_0 / \partial t_0$. Hence equation (24) may be written

$$A = A_0 - \int_{t_0}^t \left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) dt. \quad (25)$$

But $f_0 = g_0 = 0$ at all instants subsequent to t and hence

$$\int_{t_0}^t \left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) dt. \quad (26)$$

It follows that

$$A = A_0 - \int_{t_0}^{t_1} \left(u \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + v \frac{\partial g_0}{\partial t_0} \right) dt = 0, \quad (27)$$

by the first of conditions (21). The first of these new conditions is therefore equivalent to the statement that $A = 0$ at all times on the orbit of transfer when only the Sun's field is operative. A similar discussion of the second of conditions (21) leads us to the same conclusion, i. e. this is not an independent condition.

IV. Detailed Solution

In this section we shall obtain the equations governing the optimal orbit of transfer between circular orbits about two planets moving in elliptical orbits about the Sun. All orbits will be supposed coplanar so that the solution will not be of immediate practical utility. It will, however, serve to illustrate the method of application of the results of the previous section and to indicate the line along which an attack upon the three dimensional problem should proceed.

It will be supposed that transfer is effected by the application of thrusts from the motors in the vicinity of the planets, in the first instance to cause the rocket to escape from its circular orbit about the planet of departure and to move into the transfer orbit along which it coasts into the field of attraction of the planet of arrival and, in the second instance, to effect transfer from the transfer orbit into a circular orbit about this latter body. Under certain circumstances, escape from or transfer into a circular orbit is achieved most economically by application of a single thrust in a direction tangential to the orbit. Alternatively it may be advantageous to employ two impulsive thrusts. When escaping from a circular orbit by such a manoeuvre, the planet is first approached along an elliptical arc, a second thrust being applied at perigee to effect transfer into a hyperbolic trajectory along which the rocket recedes to infinity. The rule governing the choice of the mode of escape has been stated in [3]. EHRICKE [4] has calculated that for most interplanetary trajectories departing from and arriving into orbits of convenient radii, the single impulse mode of escape or arrival is the most economical. In either case, when escaping from a circular orbit, the final impulse, which sets the rocket into a hyperbolic trajectory leading into the transfer orbit, is in a direction perpendicular to the radius from the rocket to the planet's centre. At the far end of the transfer orbit, after falling along a hyperbolic arc towards the planet of arrival, the first impulsive thrust to be applied will be similarly directed.

Let e_0 be the eccentricity of the hyperbolic arc along which the rocket escapes from the field of the planet of departure. We shall neglect the effect of the Sun's field over this arc. The general solution of equations (15) in the case of motion along a conic trajectory described under an inverse square law has been given in [2]. If the hyperbolic track has polar equation $l_0/r_0 = 1 + e_0 \cos \psi_0$, where l_0 is the semi-latus rectum and (r_0, ψ_0) are polar coordinates, r_0 being measured from the centre of attraction and the angle ψ_0 from the apse, this solution is

$$\begin{aligned} U_0 &= P_0 \cos \psi_0 + Q_0 e_0 \sin \psi_0 + \frac{K_0 l_0^2}{\mu_0 e_0} I_0 \sin \psi_0, \\ V_0 &= -P_0 \sin \psi_0 + Q_0 (1 + e_0 \cos \psi_0) + \frac{R_0 - P_0 \sin \psi_0}{1 + e_0 \cos \psi_0} + \\ &\quad + \frac{K_0 l_0^2}{\mu_0 e_0^2} \left[\frac{\cot \psi_0}{1 + e_0 \cos \psi_0} + (1 + e_0 \cos \psi_0) I_0 \right], \end{aligned} \quad (28)$$

where μ_0/r_0^2 is the attraction per unit mass due to the planet and (U_0, V_0) are the radial and transverse components respectively of the primer vector. I_0 is given by the equation

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2(e_0 - 1)^2} \tan \frac{1}{2} \psi_0 - \frac{1}{2(e_0 + 1)^2} \cot \frac{1}{2} \psi_0 \\ &\quad - \frac{6e_0^2}{(e_0^2 - 1)^{5/2}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1}} \tan \frac{1}{2} \psi_0 \right) \\ &\quad + \frac{e_0^3}{(e_0^2 - 1)^2} \cdot \frac{\sin \psi_0}{1 + e_0 \cos \psi_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

The quantities P_0, Q_0, R_0, K_0 are the four arbitrary constants of integration.

The impulsive thrust is applied at the apse in the transverse direction. Hence $U_0 = 0, V_0 = 1$ at this point, where $\psi_0 = 0$. Substituting these values in the equations (28) (it will be necessary to allow $\psi_0 \rightarrow 0$ in the terms involving K_0), it will be found that

$$\begin{aligned} 0 &= P_0 - \frac{K_0 l_0^2}{\mu_0 e_0 (e_0 + 1)^2}, \\ 1 &= Q_0 (1 + e_0) + \frac{R_0}{1 + e_0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Another condition to be satisfied at the point of thrust is $u \dot{u} + v \dot{v} = 0$. Since $(u, v), (U_0, V_0)$ are rectangular components of the same vector, $U_0^2 + V_0^2 = u^2 + v^2$. Differentiating with respect to the time, it follows that

$$U_0 \dot{U}_0 + V_0 \dot{V}_0 = u \dot{u} + v \dot{v} = 0.$$

But $U_0 = 0$ and $V_0 = 1$ at the apse. Hence $\dot{V}_0 = 0$ at this point, a condition which implies that

$$-\frac{2 + e_0}{1 + e_0} P_0 + \frac{2 K_0 l_0^2}{\mu_0 e_0 (1 + e_0)} = 0. \quad (31)$$

From equations (30) and (31) we can now conclude that

$$P_0 = K_0 = 0, \quad R_0 = 1 + e_0 - (1 + e_0)^2 Q_0. \quad (32)$$

Equations (28) therefore reduce to

$$U_0 = Q_0 e_0 \sin \psi_0, \quad (33)$$

$$V_0 = Q_0 (1 + e_0 \cos \psi_0) + \frac{1 + e_0 - (1 + e_0)^2 Q_0}{1 + e_0 \cos \psi_0}. \quad (34)$$

As the rocket recedes from the planet, $r_0 \rightarrow \infty$ and $\cos \psi_0 \rightarrow -1/e_0$. Hence $\sin \psi_0 \rightarrow (e_0^2 - 1)^{1/2}/e_0$ and, when escape has been effected

$$U_0 = Q_0 (e_0^2 - 1)^{1/2}. \quad (35)$$

Equation (34) may be written

$$V_0 = \frac{Q_0 l_0}{r_0} + \frac{1 + e_0 - (1 + e_0)^2 Q_0}{l_0} r_0, \quad (36)$$

and, when r_0 is large, this is very nearly

$$V_0 = \frac{1}{l_0} \{1 + e_0 - (1 + e_0)^2 Q_0\} r_0. \quad (37)$$

Equations (35) and (37) specify the components of the primer along and perpendicular to the asymptote of the hyperbola of escape as the rocket enters the transfer orbit. Along this orbit, the equations (15) must be integrated forward from the initial conditions obtaining at the end of the hyperbolic escape trajectory. Equations (15) being of the second order, these conditions may be specified by the values taken by $U_0, V_0, \dot{U}_0, \dot{V}_0$ at this time of transition. Now

$$\dot{U}_0 = 0, \quad (38)$$

$$\dot{V}_0 = \frac{1}{l_0} \{1 + e_0 - (1 + e_0)^2 Q_0\} \dot{r}_0. \quad (39)$$

\dot{r}_0 is the final velocity of recession of the rocket from the planet of departure and will be given by the equation

$$\dot{r}_0 = w_0(e_0 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (40)$$

where w_0 is the circular velocity at the apse of the hyperbolic trajectory.

Let $l/r = 1 + a \cos \psi$ be the polar equation of the transfer orbit, the pole being situated at the Sun and ψ being measured from perihelion. It is shown in [2] that the radial and transverse components of the primer on such an orbit, when A [equation (16)] is to be zero, are given by

$$U = P \cos \psi + Q a \sin \psi, \quad (41)$$

$$V = -P \sin \psi + Q(1 + a \cos \psi) + \frac{R - P \sin \psi}{1 + a \cos \psi}, \quad (42)$$

P, Q, R being, as yet, undetermined.

(\dot{U}, \dot{V}) will be the components of the rate of change of the primer relative to axes along and perpendicular to the radius vector r and rotating, therefore, with angular velocity $\dot{\psi}$. The components of this rate vector relative to fixed axes instantaneously coincident with these moving axes are accordingly

$$(\dot{U} - \dot{\psi} V, \dot{V} + \dot{\psi} U), \quad \text{or} \quad [(U' - V) \dot{\psi}, (V' + U) \dot{\psi}],$$

where primes denote differentiations with respect to ψ . Employing equations (41) and (42), we can show that these components are given by

$$(U' - V) \dot{\psi} = \left(\frac{P \sin \psi - R}{1 + a \cos \psi} - Q \right) \dot{\psi} = \dot{U}, \quad (43)$$

$$(V' + U) \dot{\psi} = \left[\frac{R a \sin \psi - P a - P \cos \psi}{(1 + a \cos \psi)^2} \right] \dot{\psi} = \dot{V}. \quad (44)$$

The components of the rate of change of the primer in the directions of axes along and perpendicular to the asymptote of the escape trajectory can now be calculated. These directions are non-rotating. Let Φ_0 be the angle made by

this asymptote with the perpendicular to the radius vector r in the sense of ψ increasing (Fig. 1). Then the required components are

$$L = \dot{U}_f \sin \Phi_0 + \dot{V}_f \cos \Phi_0 \text{ along the asymptote,} \quad (45)$$

$$M = -\dot{U}_f \cos \Phi_0 + \dot{V}_f \sin \Phi_0 \text{ perpendicular to the asymptote.} \quad (46)$$

These components must take the same values at the beginning of the transfer orbit as they take at the end of the escape orbit. These latter values are given by equations (38) and (39). Hence, from (46) and equations (39), (40), (43) and (44), we conclude that

$$\begin{aligned} & (e_0 - 1)^{\frac{1}{2}} \{1 - (e_0 + 1) Q_0\} = \\ & = \left[\left\{ \frac{R a \sin \psi - P a - P \cos \psi}{(1 + a \cos \psi)^2} \right\} \cdot \right. \\ & \quad \cdot \sin \Phi_0 - \left\{ \frac{P \sin \psi - R}{1 + a \cos \psi} - \right. \\ & \quad \left. - Q \right\} \cos \Phi_0 \left. \right] \cdot \frac{l_0 \dot{\psi}}{w_0(e_0 + 1)}. \quad (47) \end{aligned}$$

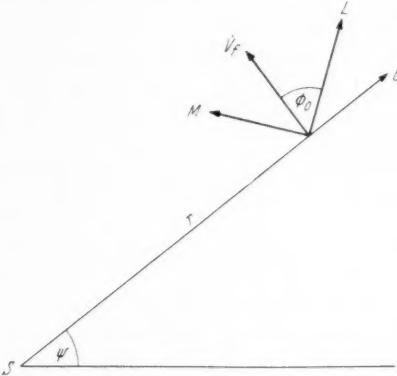


Fig. 1.

But $\dot{\psi}$ will be of the order of the mean angular velocity of the rocket about the Sun when it is in the transfer orbit, whereas $(e_0 + 1) w_0/l_0 = w_0/a_0$, a_0 being the distance of the apse of the hyperbolic orbit from the centre of attraction, and is therefore equal to the angular velocity of a body in a circular orbit of radius a_0 about the planet. Thus $\dot{\psi}$ is small compared with $(e_0 + 1) w_0/l_0$ and we shall approximate equation (47) by

$$1 - (1 + e_0) Q_0 = 0,$$

$$\text{or } Q_0 = \frac{1}{1 + e_0}. \quad (48)$$

From (45) and equations (38), (43) and (44), we obtain the condition

$$\left(\frac{P \sin \psi - R}{1 + a \cos \psi} - Q \right) \sin \Phi_0 + \left[\frac{R a \sin \psi - P a - P \cos \psi}{(1 + a \cos \psi)^2} \right] \cos \Phi_0 = 0, \quad (49)$$

to be satisfied for the value of ψ appropriate to the commencement of the orbit of transfer.

Substituting for Q_0 from equation (48) in equations (35) and (37), we find that at the end of the escape trajectory

$$U_0 = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)}, \quad V_0 = 0. \quad (50)$$

The components of the primer in the directions along and perpendicular to the radius vector r are accordingly

$$U = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)} \sin \Phi_0, \quad V = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)} \cos \Phi_0, \quad (51)$$

and these must be their initial values at the start of the orbit of transfer. Hence

$$P \cos \psi + Q a \sin \psi = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1}\right)} \sin \Phi_0, \quad (52)$$

$$- P \sin \psi + Q(1 + a \cos \psi) + \frac{R - P \sin \psi}{1 + a \cos \psi} = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1}\right)} \cos \Phi_0. \quad (53)$$

The transition from the transfer orbit into the hyperbolic approach orbit is dealt with similarly and yields the conditions

$$\left(\frac{P \sin \psi' - R}{1 + a \cos \psi'} - Q\right) \sin \Phi_1 + \left[\frac{R a \sin \psi' - P a - P \cos \psi'}{(1 + a \cos \psi')^2}\right] \cos \Phi_1 = 0, \quad (54)$$

$$P \cos \psi' + Q a \sin \psi' = \sqrt{\left(\frac{e_1 - 1}{e_1 + 1}\right)} \sin \Phi_1, \quad (55)$$

$$- P \sin \psi' + Q(1 + a \cos \psi') + \frac{R - P \sin \psi'}{1 + a \cos \psi'} = \sqrt{\left(\frac{e_1 - 1}{e_1 + 1}\right)} \cos \Phi_1, \quad (56)$$

ψ' being the value of ψ appropriate to the end of the transfer orbit, Φ_1 being the angle made by the asymptote of the approach orbit with the perpendicular to the radius vector r and e_1 being the eccentricity of the hyperbola of approach.

Let $(1/\rho, a, \gamma)$ be the semi-latus rectum, eccentricity and longitude of perihelion respectively of the orbit of transfer. Let $(1/\rho_0, a_0, \gamma_0)$, $(1/\rho_1, a_1, \gamma_1)$ be the corresponding quantities for the orbits of the planet of departure and of arrival respectively. Let $1/s_0$ be the distance of the planet of departure from the Sun and let θ_0 be its longitude at the time of departure. Let $(1/s_1, \theta_1)$ be the corresponding quantities for the target planet at the time of arrival. Then $\psi = \theta_0 - \gamma$, $\psi' = \theta_1 - \gamma$. The difference between the velocity of a body in the orbit of the planet of departure at the point $(1/s_0, \theta_0)$ and the velocity of a body in the transfer orbit at this point, will be equal to the velocity of the rocket relative to the planet of departure when it has escaped from this body's attraction. This velocity is in the direction of the asymptote of the escape hyperbola and makes an angle Φ_0 with the direction perpendicular to the radius vector from the Sun. Its magnitude is given by equation (40). An impulse of the appropriate magnitude in the direction determined by Φ_0 will accordingly transfer a body from the orbit $(1/\rho_0, a_0, \gamma_0)$ into the orbit $(1/\rho, a, \gamma)$. In [5], we show that the equations

$$\rho_0 a_0 \sin(\theta_0 - \gamma_0) = (s_0 - \rho_0^{1/2} D_0) \tan \Phi_0, \quad (57)$$

$$\rho a \sin(\theta_0 - \gamma) = (s_0 - \rho^{1/2} D_0) \tan \Phi_0, \quad (58)$$

may be written down, D_0 being a constant whose physical significance is explained in this earlier paper.

From the polar equations of the orbits of the planet of departure and of transfer, we also obtain the equations

$$s_0 = \rho_0 \{1 + a_0 \cos(\theta_0 - \gamma_0)\} = \rho \{1 + a \cos(\theta_0 - \gamma)\}. \quad (59)$$

Similarly, by consideration of the transition from the transfer orbit into the orbit of the target planet, the following equations can be found,

$$\rho_1 a_1 \sin(\theta_1 - \gamma_1) = (s_1 - \rho_1^{1/2} D_1) \tan \Phi_1, \quad (60)$$

$$\rho a \sin(\theta_1 - \gamma) = (s_1 - \rho^{1/2} D_1) \tan \Phi_1, \quad (61)$$

$$s_1 = \rho_1 \{1 + a_1 \cos(\theta_1 - \gamma_1)\} = \rho \{1 + a \cos(\theta_1 - \gamma)\}. \quad (62)$$

Also from [5], we find that the magnitude of the velocity increment necessary to effect transfer between the orbits $(1/\rho_0, a_0, \gamma_0)$ and $(1/\rho, a, \gamma)$ is

$$\mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\rho_0^{\frac{1}{2}}} \right) s_0 \sec \Phi_0, \quad (63)$$

μ/r^2 being the attraction per unit mass due to the Sun. This velocity increment must equal the ultimate speed of recession of the rocket from the planet of departure as it enters the transfer orbit. This speed has been given in equation (40) and we therefore have the condition

$$w_0(e_0 - 1)^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\rho_0^{\frac{1}{2}}} \right) s_0 \sec \Phi_0. \quad (64)$$

A second condition of the same type follows in a similar fashion, viz.,

$$w_1(e_1 - 1)^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}} \right) s_1 \sec \Phi_1. \quad (65)$$

Equations (49), (52) — (65) form a system of 16 equations for the same number of unknowns, viz., $P, Q, R, \rho, a, \gamma, s_0, \theta_0, s_1, \theta_1, \Phi_0, D_0, \Phi_1, D_1, e_0, e_1$. We can eliminate P, Q, R by solving for these quantities in equations (49), (52) and (53) and repeating the procedure in equations (54) — (56). The results, after simplifying with the aid of equations (57) — (62), are

$$\rho^{\frac{1}{2}} a P = \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)} \sin \Phi_0 \left(D_0 - \frac{s_0}{D_0} \right) = \sqrt{\left(\frac{e_1 - 1}{e_1 + 1} \right)} \sin \Phi_1 \left(D_1 - \frac{s_1}{D_1} \right), \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \rho a^2 Q &= \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)} \left[\left(1 + \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{D_0} \right) (s_0 - \rho) \cos \Phi_0 + (s_0 - \rho^{\frac{1}{2}} D_0) \tan \Phi_0 \sin \Phi_0 \right] = \\ &= \sqrt{\left(\frac{e_1 - 1}{e_1 + 1} \right)} \left[\left(1 + \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{D_1} \right) (s_1 - \rho) \cos \Phi_1 + (s_1 - \rho^{\frac{1}{2}} D_1) \tan \Phi_1 \sin \Phi_1 \right], \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} Q + R &= - \sqrt{\left(\frac{e_0 - 1}{e_0 + 1} \right)} \left(\frac{s_0 + \rho}{D_0 \rho^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cos \Phi_0 = \\ &= - \sqrt{\left(\frac{e_1 - 1}{e_1 + 1} \right)} \left(\frac{s_1 + \rho}{D_1 \rho^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cos \Phi_1. \end{aligned} \quad (68)$$

These last three equations, together with equations (57) — (65), determine the optimal orbit of transfer. They should be compared with the corresponding system of equations determining the optimal orbit of transfer when departure or arrival is directly from or into a planetary orbit. These equations are given in [2].

In the particular case when the planets are moving in coplanar concentric circular orbits, it may be shown that the solution of the above equations corresponds to a transfer which is effected via the cotangential ellipse as for direct transfer between such planetary orbits.

References

1. D. F. LAWDEN, J. Amer. Rocket Soc. **23**, 360 (1953): Minimal Rocket Trajectories.
2. D. F. LAWDEN, J. Brit. Interplan. Soc. **13**, 87 (1954): Fundamentals of Space Navigation.
3. D. F. LAWDEN, J. Brit. Interplan. Soc. **12**, 68 (1953): Escape to Infinity from Circular Orbits.
4. K. A. EHRICKE, J. Amer. Rocket Soc. **24**, 381 (1954): Satellite Orbits for Interplanetary Flight.
5. D. F. LAWDEN, J. Brit. Interplan. Soc. **11** (Annual Report), 321 (1952): Inter-Orbital Transfer of a Rocket.

Protection of Humans from Heavy Nuclei of Cosmic Radiation in Regions Outside the Atmosphere¹

By

H. J. Schaefer, Pensacola /Florida², ARS

(With 3 Figures)

Abstract. It has been demonstrated that the dense ionization columns which heavy nuclei of the primary cosmic radiation produce in living tissue can cause severe local cellular damage. The specifically harmful part of a heavy nucleus track is its terminal section. Therefore, incomplete shielding can worsen the conditions by moving up the most effective part of an incoming beam into the body to be protected. The relationships involved are presented in graphs. It is shown that the weight requirements for full protection are prohibitively high.

Due to the influence of the geomagnetic field, the spectral composition of the cosmic radiation changes greatly with latitude. The most harmful nuclei are limited to the latitude region of 45° and higher. The exposure hazard thus can be expected to be considerably higher in the polar region than in the equatorial belt. As to the quantity of damage, no conclusive experimental data are available. It can be expected that a fair chance to avoid serious damage exists for limited exposure times, particularly in the magnetically protected equatorial toroid around the Earth.

Zusammenfassung. Versuche haben gezeigt, daß die dichten Ionisationskolonnen, welche die schweren Kerne der primären Höhenstrahlung im lebenden Gewebe erzeugen, ernste lokale Zellschädigungen hervorrufen können. Da der Endteil der Bahn eines schweren Kernes besonders wirksam ist, kann unvollständige Abschirmung die Bedingungen verschlimmern, indem der wirksamste Teil eines einfallenden Bündels in den zu schützenden Körper vorverlegt wird. Die zahlenmäßige Darstellung dieser Gesetzmäßigkeiten zeigt, daß die für vollen Schutz erforderlichen Gewichte unmöglich hoch sind.

Durch den Einfluß des erdmagnetischen Feldes ändert sich die spektrale Zusammensetzung der primären Höhenstrahlung stark mit der Breite. Die gefährlichen Kerne kommen nur oberhalb einer Breite von 45° vor. Man kann deshalb annehmen, daß die Strahlengefährdung außerhalb der Erde in der Polarzone beträchtlich größer ist als im Äquatorgebiet.

Experimentelles Material für die Aufstellung quantitativer Daten über die Strahlengefährdung liegt noch nicht vor. Doch kann erwartet werden, daß vor allem in dem magnetisch geschützten Torus in der Äquatorebene ernstere Schädigungen in begrenzten Flugzeiten nicht auftreten werden.

Résumé. Des essais ont démontré que les colonnes de grande densité de ionisation, produits au tissu par les noyaux lourds des rayons cosmiques peuvent entraîner des détériorations importantes. La partie finale de la trajectoire d'un noyau lourd étant particulièrement efficace, une protection incomplète peut aggraver les conditions en déplaçant cette partie dans le corps à protéger. En présentant ces données en chiffres on prouve, que les poids nécessaires pour une protection complète sont extrêmement grands.

La composition spectrale de la radiation cosmique primaire varie fortement avec la latitude à cause de l'influence du champ magnétique de la terre. C'est la raison,

¹ This paper was presented at the Fifth I.A.F.-Congress at Innsbruck, August 6, 1954.

² Naval School of Aviation Medicine, Pensacola/Florida, U.S.A.

pour laquelle les noyaux dangereux n'existent que au-delà d'une latitude de 45°. C'est pourquoi qu'on peut admettre, que les risques dûs à la radiation cosmique au-dessus de l'atmosphère sont de loin plus importants dans les zones polaires que dans les contrées de l'équateur.

On n'a pas encore des expériences pour des données quantitatives concernant ces risques. Mais il semble permis de croire que des détériorations importantes ne se produiront pendant des temps de vol limités surtout dans le tore de l'équateur, protégé en sens magnétique.

Introduction

Among the many problems which man faces as he sets out to penetrate into the space beyond the air blanket of the Earth a peculiar and controversial one is the question of a possible health hazard from the heavy primaries of cosmic radiation. At the Third International Astronautical Congress two years ago in Stuttgart I tried to outline what could be said to this problem on the basis of our knowledge at that time [1]. The purely physical data on the intensities, the mass and energy spectra of the heavy nuclei presented at that time are still entirely valid. They have been corroborated in the meantime and supplemented in some detail.

However, new and important experimental results on the question of the biological effects of the heavy component have been reported since then. EUGSTER [2] could show that the excessively high density of ionization in the cellular and subcellular level in tissue as it is produced by a heavy nucleus along its path can produce heavy injury. Still more direct conclusions to human tissue can be drawn from the experiments of CHASE [3] who could demonstrate such damaging effects from single high-energy events of the primary radiation in mammalian tissue.

Though these results do not yet permit the definition of a permissible dose for humans in quantitative terms it seems worth while to study the question of protection from the heavy nuclei of the primary cosmic radiation more closely. The relationships pertaining to this problem are rather intricate already on the physical level due to the complex structure of the mass and energy spectra of the heavy components and to the complicated changes which are produced by the geomagnetic field. The heavy nuclei of the primary cosmic radiation are completely ionized atoms, i. e., atom nuclei entirely stripped of their orbital electrons. They come in from outer space at very high velocities which cover from a minimum value of 300 millions e-volts per nucleon (65 per cent of the velocity of light) a continuum of a width of several ten-powers. So far all elements of the Periodic System up to Fe have been found as regularly occurring components of the heavy spectrum. Single nuclei of atomic numbers 41 and 50 have also been observed.

Radiobiologically the heavy nuclei represent an entirely novel phenomenon because of their high specific ionization or rate of energy loss (REL). Whereas an ordinary alpha particle of radium produces a maximum ionization of about 5,500 ion pairs per one micron of tissue a Fe-nucleus of the primary cosmic radiation has a maximum REL of 100,000 IP/micron_T. It is because of this excessively high REL along the tracks of the heavy nuclei that their effects on living matter cannot be measured in terms of the common unit for ionizing radiations, the roentgen *r*. A new line of thought has to be developed in radiobiology which replaces the concept of the subliminal tissue dosage by the concept of the subliminal rate of destruction for the different cell populations in the organism. The experimental approach to this basically new problem is a challenging task for modern radiobiology.

I. Physics and Biophysics of Heavy Nuclei

1. Specific Ionization (REL) and Relative Biological Effectiveness (RBE)

The structure of the ionization column of a heavy nucleus in tissue (or any other absorber) is described quantitatively by the so-called BRAGG curve. Fig. 1 shows such a curve for a nucleus of $Z = 12$, i. e., a Mg-nucleus and for an initial kinetic energy of 7,200 million e-volts. This initial energy corresponds to a range in tissue of 9.4 centimeters and to an initial REL of 1,270 IP/micron_T. As speed and residual range gradually decrease the REL increases and finally passes, in the terminal section of the track, through a steep and extremely high maximum.

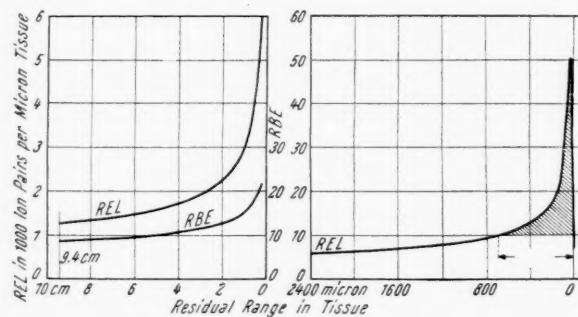


Fig. 1. BRAGG curve of a heavy nucleus of $Z = 12$ (Mg)
and of 7200 million e-volt kinetic energy.

If one arbitrarily defines a minimum REL of 10,000 IP/micron_T as the lower limit for producing the characteristic tissue damage of heavy nuclei, it is seen from Fig. 1 that for a Mg-nucleus only a length of 660 micron at the very end of the track fulfills this condition. Though this is still about 10 times the total length of an ordinary alpha particle of radium it represents only a small fraction of the total length of path of the Mg-nucleus. For the other components of the heavy spectrum Table I gives the lengths of the terminal sections of the tracks in which the REL exceeds 10,000 IP/micron_T.

Table I. Lengths of Terminal Sections of Heavy Nuclei Tracks in Living Tissue with a Rate of Energy Loss in Excess of 10,000 Ion Pairs per Micron

Type of Nucleus	Atomic Number	Length in Micron
C, N, O	7	120
Mg	12	660
Ca	20	3 500
Fe	26	10 000

The greater biological effect of a particle of high REL does not rest just on the larger numbers of ion pairs produced but requires for its quantitative description an additional factor. If, for instance, a total ionization of 10,000 ion pairs is set free in a tissue volume of hundred cells once so that this ionization is distributed evenly over the hundred cells and once so that it is administered only

to ten out of the hundred cells, the damage inflicted upon the tissue volume is markedly larger in the second case. The ionization dosage measured in r has to be multiplied by an intensifying factor, the so-called relative biological effectiveness (RBE) for obtaining the true biological dose of a radiation of a high REL. This phenomenon has been studied, with terrestrial sources of radiation of a high REL, in many investigations. The relationship between the REL and the RBE so far could be established to a highest value of about 5000 IP/micron_T since terrestrial sources do not provide higher values. Nevertheless this range up to 5000 IP/micron_T covers the largest part of the total length of the heavy nuclei tracks as can be seen from Fig. 1.

It is questionable for principal reasons whether the concept of the RBE can be applied to particle radiations of such an excessively high REL as it is encountered in the terminal sections of heavy nuclei tracks. The groups of cells along these ionization trails are exposed to doses of more than 1000 r within their full volume. This represents a severe local tissue damage in itself which cannot be adequately described in the common way by the mean value of the ionization dosage for the entire surrounding tissue area.

2. Attenuation in Absorbing Media

Fig. 1 shows the BRAGG curve for a Mg-nucleus of minimum energy. Actually, the energy spectrum is a continuum with the energy of Fig. 1 as the lower edge. If a shielding layer of this maximum thickness of 9.4 cm would be provided only the very few nuclei which enter exactly with that minimum energy would be screened off. The entire residual continuum of higher energies still would possess a finite residual penetrating power after traversal of the shielding layer and, what is worse, the terminal sections of their tracks where the REL is at its maximum would be moved up into the object to be protected.

As a matter of fact the values of the minimum ranges for the different components of the heavy spectrum are such that the frequencies of hits of maximal ionization for small animals (mice, rabbits) are zero if these animals are freely exposed to the primary radiation entirely outside the atmosphere. All incident heavy nuclei would penetrate the animal body entirely developing within it only a comparative small REL and passing through the ionization peak outside the body. A "protective" layer of suitable thickness would increase the frequency of hits of maximal ionization in the animal considerably. It stands to reason that these relationships have to be given careful consideration in animal experimentation with rockets in which the test objects are carried completely clear of the atmosphere. To obtain, in such experimentation, the highest possible hit frequencies of nuclei of maximum ionization requires a certain narrowly defined thickness of a moderating layer. To be sure this statement does not hold for present day balloon technique with its ceiling of about 10 millibars. At this residual pressure the equivalent thickness of the atmosphere lies already beyond the optimum.

Ordinary ionization, i. e., formation of ion pairs by knocking out orbital electrons from the atoms of the absorber is not the only interaction between heavy nuclei and the adsorbing medium. In addition to these frequent collisions with the orbital electrons now and then a central collision with an atom nucleus occurs. These encounters are much less frequent than the former ones but of greater consequence. Both the projectile and the target nucleus undergo in such a nuclear collision always a heavy disturbance and most of the time a complete destruction. The projectile ceases to exist after such a collision. The fragments, of course, continue to dissipate the kinetic energy of the projectile transmitted

to them in the collision. However, the phenomenon of specific effectiveness for tissue, the high REL disappears in the nuclear collision since the fragments consist only of particles of single or double charge of a correspondingly small REL. The extremely high ionization dosages, administered before the collision to single cells along the tracks of the heavy nucleus are now widely scattered over larger tissue volumes.

The rate at which nuclear collisions occur in a heavy nuclei beam is described in quantitative terms by the so-called mean free path for nuclear collision R_m . This magnitude is usually expressed in grams per square centimeter. It signifies the thickness of absorber which diminishes the number of incident heavy nuclei of a parallel beam to $1/e$ (37 per cent). Using the mean free path for nuclear collision R_m the law of absorption of heavy nuclei can be written in the well known formula:

$$N = N_0 \cdot e^{-R/R_m} \quad (1)$$

where N_0 signifies the number of incident nuclei and N the number of nuclei at the depth R of the absorber. The mean free path for nuclear collision depends also slightly on the atomic composition of the absorber medium and, for accurate calculations, cannot be expressed simply in g/cm². Since volume of an atom nucleus increases linearly with the atomic weight, its radius changes with the third root of the atomic weight. The cross section for nuclear collisions, consequently, increases with the square of the third root of the atomic weight and the mean free path decreases along the same function. That means that equal weights per unit area of a medium of higher atomic weight produce a smaller attenuation than a medium of smaller atomic weight. Shielding of heavy nuclei is carried out most effectively, i. e., with the least expenditure of weight by using elements of low atomic weight preferably hydrogen. However, this dependence is not very pronounced since it obeys a less than linear relationship with the exponent 0.667.

Ordinary ionization, effected in collisions of heavy nuclei with orbital electrons in the absorber, is independent of the atomic composition of the latter, with the only exception of hydrogen which is well known to possess twice the number of orbital electrons per gram than any other element of the Periodic System.

Since in this discourse only a general appraisal of the problem of shielding is intended the above explained dependence of the mean free path on the atomic weight is disregarded. However, it might be mentioned that the abscissa data of Fig. 3 hold strictly for materials of the mean atomic composition of air. If elements of higher atomic weight are used, for instance aluminum, the thicknesses required for equal attenuation are larger by the ratio of the square of the third root of the atomic weights.

The maximum range of an incident heavy nucleus in the absorber obviously is reached when the nucleus has spent its total kinetic energy in ordinary ionizations without being disintegrated beforehand by a nuclear collision. Calling this maximum range R_0 and inserting it in equation (1) shows that the number of nuclei of an incident beam which escape nuclear collision and actually pass through the terminal section of their range obeys a negative e -function of the maximum range R_0 . Only nuclei of a sufficiently small maximum range, i. e., of a sufficiently small initial kinetic energy have a sizeable probability to reach the terminal section of their tracks and to pass through the maximum of biological effectiveness.

Vol
1
195

3. Energy and Range Spectrum

To assess quantitatively this fraction of the incoming nuclei, their spectral composition with regard to the kinetic energies or ranges has to be known as it is outside the air blanket before any interaction processes have occurred. Measurements of the numbers and kinetic energies of the heavy nuclei at the upper end of the atmosphere have been carried out repeatedly [5, 6, 7]. Furthermore, the relationship between kinetic energy and range of heavy particles is well investigated [4]. Thus, the energy spectra can be easily converted into range spectra. Fig. 2 shows the differential range spectra of the heavy nuclei, broken down into 4 components. The curves *A* give the total incident particle intensity, whereas the curves *B* show the fraction of particles which actually travel the full range R_0 in the absorber without being annihilated beforehand by nuclear collision. In other words, the curves *B* signify that part of the incident beam which produces the maximum values of specific ionization on which the interest of the radiobiologist is centered.

4. Influence of the Geomagnetic Field; Latitude Dependence of the Range Spectrum

At this point, the influence of the geomagnetic field on the structure of the energy and range spectra has to be discussed. The magnetic field of the Earth exerts a deflecting influence on the orbits of the heavy nuclei already at distances of many Earth diameters in free space. According to the basic laws of electrodynamics this deflection is strongest for nuclei approaching the Earth in the equatorial plane and zero for nuclei traveling along the magnetic axis. This relationship is usually expressed in terms of the minimum energy required for a heavy nucleus to reach the Earth at vertical incidence (speaking from the standpoint of an observer on the surface of the Earth). Table II gives these minimum energies and minimum ranges for different latitudes. These values define at the same time the cut-off values of the spectra at the lower end. In the spectra of Fig. 2 these lower edges are indicated for the three geomagnetic latitudes of 55° , 50° , and 45° . It is seen that this latitude dependence of the lower edge of the range spectrum is very pronounced.

For the latitude interval from 0° to 55° excellent quantitative agreement exists between theory and experiment with regard to this shift of the geomagnetic cut-off values. Beyond 55° , the theory postulates a continuous strong decrease of the cut-off values towards higher latitudes. However, all measurements consistently indicate that at about 55° the minimum energy of arrival becomes invariant of latitude and remains constant for the whole remaining interval up to the pole. No satisfactory explanation for this "latitude knee" at about 55°

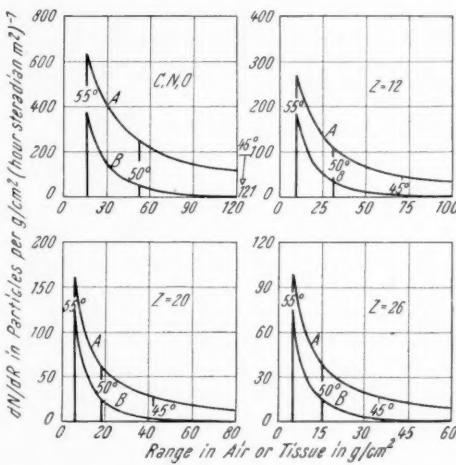


Fig. 2. Differential range spectra of the heavy components of primary cosmic radiation outside the atmosphere at 55° , 50° , and 45° latitude.

has been offered so far. For the problem of a possible exposure hazard this leveling off has the comforting consequence that beyond the latitude of 55° the amount of tissue damage does not increase further and that all experimental results obtained in the latitude region about 55° have full validity for the entire polar cap.

Table II. *Geomagnetic Cut-off Values for Heavy Nuclei*

Geomagnetic Latitude	Energy per Nucleon in Million e-volts	Range in g/cm ²			
		C,N,O	Mg	Ca	Fe
55°	300	16.1	9.4	5.6	4.7
50°	650	52.5	30.6	18.3	15.2
45°	1150	121.0	70.0	42.5	35.0
40°	1800	221.0	129.0	78.0	64.5
30°	3350	474.0	275.0	164.0	138.0

Peculiar consequences derive from the geomagnetic cut-off phenomenon with regard to the changes produced in the spectra *A* and *B*. It is seen from Fig. 2 that in the spectra *A* the particle intensity, in going to greater ranges, at first decreases rather quickly, then more slowly. Actually, the full spectrum extends over several ten-powers of range until the particle intensity approaches zero. Quite contrary, the particle intensity in the spectrum *B* reaches zero rapidly along a negative *e*-function. The ordinates of the curves *B* are practically equal to zero already within the limited intervals depicted in the graphs. Now, since the geomagnetic field produces equal cut-off edges in both types of spectra the spectra *B*, due to their considerably smaller total width, are narrowed down to a much higher degree. This effect is so pronounced that already at a latitude somewhere between 50° and 45° the spectra of type *B* have shrunk to zero width. From then on, they cease to exist for the full interval of lower latitudes. Thus, the phenomenon of extremely high specific ionization also terminates at this critical latitude. Nuclei of maximum REL do not occur in an equatorial zone of about $2 \times 45^{\circ}$ opening angle. This is in full agreement with experimental observations. So far, not one maximum ionization track of a heavy nucleus has been observed at a latitude below 45° .

It is a logical consequence of this relationship that the exposure hazard from heavy nuclei in regions outside the atmosphere will be incomparably more severe at northern latitudes than in the equatorial belt. "Incomparably more severe", in this case, refers not so much to the quantity of damage but rather to a basically different mechanism of damage. Heavy nuclei of maximum ionization produce along their tracks in tissue an ionization column which floods a microscopical cylinder of 1 to 2 cells in diameter and of many to several hundred cells' length with radiation dosages of some thousand *r* units. It is this novel phenomenon which poses the problem of the exposure hazard from the primary cosmic radiations, and this phenomenon is limited to the polar regions.

II. Protection from Heavy Nuclei by Shielding

1. Dosage Increase due to Transition Effects in the "Shielding" Layer

It seems of special interest to investigate the mechanism of absorption of an incident beam of heavy nuclei which contains the full range spectrum as it is encountered at a latitude of 55° and higher (Fig. 2). We assume a parallel beam

of incident heavy nuclei of a spectral composition as described in Fig. 2 for the latitude of 55° . This beam penetrates at right angle a shielding layer of varying thickness. Radiobiologically the conditions of exposure behind this wall are described by three characteristic magnitudes, the number of particles, the ionization dosage, and the biological dosage. These three magnitudes are shown separately in Fig. 3 in their dependence on the thickness of the shielding wall. The left-hand graph holds for the lightest component of the heavy spectrum, the C, N, O-group, and the right-hand graph for the heaviest one, the Fe-group. It is seen that the biological dosage for both groups shows a

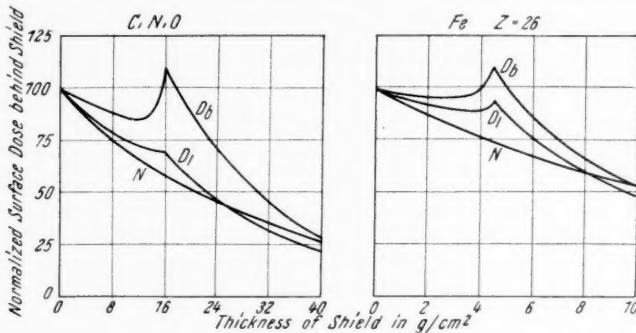


Fig. 3. Shielding of heavy nuclei of spectral composition corresponding to latitudes of 55° and higher. N number of particles; D_i surface ionization dosage; D_b biological dosage.

pronounced, sharp maximum at a well defined finite thickness. For this critical thickness, consequently, the "shield" does not act as a protective layer as intended but as an intensifier. Though the intensification is not very large, it follows at least that no protection effect is developed as long as the thickness of the wall does not exceed 18 g/cm^2 for the lightest and 5 g/cm^2 for the heaviest component.

The underlying mechanism for this peculiar phenomenon has been discussed briefly above. The critical thickness of 18 or 5 g/cm^2 respectively corresponds exactly to the lower edges of the range spectra. As long as the thickness remains smaller than this value all nuclei belonging to the fraction B (Fig. 2) of the incident beam do not reach their ionization peak within the shielding layer, but spend practically their full range within it. Thus, the maxima of the specific ionization occur directly behind the shield in the uppermost layers of the object to be protected increasing the surface dose in it considerably.

2. The Ordinary Shielding Function

A basically different relationship results if the biological dosage is computed for a spectral composition corresponding to a latitude of 45° or smaller, i. e., for a spectrum in which the short ranges are cut off. It has been discussed above that in such spectra the component B (Fig. 2) is entirely absent. All incident nuclei sooner or later become annihilated in nuclear collisions before reaching the terminal section of their tracks with the ionization peak. Consequently the phenomenon of a maximum biological dosage at finite thickness of the shield also is absent. The protecting action of the wall for such a beam begins at zero thickness and increases continuously. For this case, ionization dosage and biological dosage follow the same law as the particle number. The latter, however, is seen from equation (1) above to be independent of range. Thus, the dependence

of the particle number on the thickness of shield is the same for all latitudes and is described for all latitudes by the pertinent curve in Fig. 3. The ionization dosage as well as the biological dosage can be obtained from the particle number by multiplying it by the constant values of the specific ionization or the specific ionization times RBE respectively. The assumption of a parallel beam in the derivation above is a simplification. Actually, in the regions on top of the atmosphere, the radiation enters from all directions of the full upper hemisphere. However, the basic relationship remains valid also for this condition, since the total solid angle of the upper hemisphere can be disintegrated into many differential solid angles each of which represents a parallel beam.

III. Conclusions

Of special interest are the consequences for the construction of shielding layers with regard to the weights involved. The pertinent values can be read directly from the abscissae of Fig. 3. The unit used, g/cm², signifies directly the weight of one square centimeter of shielding layer. It is seen immediately that any significant protection requires excessively high weights even for a small dome protecting only one person against the upper hemisphere. This finding holds for both the full spectrum of northern regions as well as for the narrower spectrum of the equatorial zone.

In this evaluation another quite basic radiobiological fact has to be kept in mind. The terms threshold dose and permissible dose when applied to radiation safety problems cannot be defined in the strictly numerical manner which is common for constants in physics and engineering. Radiosensitivity like almost all other reactions of the organism shows a considerable variability. A group of individuals selected at random will always show marked differences in the quantity of damage produced by a certain dose. Therefore, radiation safety measures are effective only if they reduce the incident intensity considerably, for instance, at least by the factor ten. To reduce a biological dosage to half or a quarter of its original value is an entirely useless thing to do from the standpoint of radiation safety. Such a reduction, remaining within the range of the natural variability, will produce only a certain shift in the percentage values of the more or less heavily injured individuals.

Under these circumstances, effective protection from heavy nuclei by shielding seems entirely infeasible even for a larger rocket ship. The idea of placing fuel tanks around the crew compartments is no way out either since the fuel under ordinary circumstances will be entirely or almost entirely used up by the time the ship has penetrated the atmosphere and is entering the heavy nuclei region. Of special importance is here the above explained fact that incomplete shielding can worsen the exposure hazard by increasing the hit numbers of maximum ionization. Unless one thinks in terms of a large space platform in which tons of material is to be stored and can be used for shielding the problem of protection does not seem amenable to a solution. A chance for a way out of this difficulty is the possibility that actually protection is not needed for heavy nuclei hits. This opens the discussion of a very controversial issue. Present day experimental knowledge concerning the biological effectiveness of the heavy nuclei is entirely inadequate to make any definite statement in this respect. Experimentation with heavy nuclei can be performed only at extreme altitude at the upper limit of the atmosphere. The only vehicles at our disposal for such experimentation are balloon and rocket. Both have severe limitations. A balloon requires for developing lift a certain ambient air pressure and, therefore, can

Vol
1
195

ascend only to altitudes in which a marked absorption of the incoming beam of heavy nuclei has already occurred. It is especially undesirable that this absorption primarily affects the heaviest and slowest nuclei, i. e., those on which the main interest of the radiobiologist is centered. The rocket is not subjected to this aerostatic limitation and reaches the zones of zero air pressure. However, it stays there only for minutes and this severely limits the hit frequencies obtainable. Since these inadequacies of present experimental technique are not apt to be alleviated in the near future, a conclusive answer concerning the problem of the exposure hazard from the heavy primaries might require years of further research.

To be sure one statement can already be made with certainty at the present time. The radiation hazard from heavy nuclei hits of maximum ionization will be incomparably larger than from ordinary "through shots" of heavy nuclei. It might well be that a permanent stay of man in the zones, from which the geomagnetic field excludes all hits of maximum ionization, can be endured without significant somatic radiation injury. But it is very questionable, to say the least, whether this is true for the incompletely shielded zones of higher latitudes and all the more for the entirely unprotected regions far distant in interplanetary space.

For these regions, then, it will be a matter of the individual's own decision how he chooses to weigh the radiation hazard in the general pattern of dangers which space travel will imply. Since radiation damage, even if it is severe, does not develop until after weeks or months the performance of man during exposure to heavy nuclei will not be noticeably impeded and the harmful effects never will incapacitate the crew of a rocket ship during actual flight.

Very likely, a statistical factor of chance will also be involved in these hazards. It was mentioned above that exceptionally heavy nuclei have been observed at a few occasions. The probability of a hit from these rare giants among the heavy nuclei is, of course, very small. In this respect, the heavy nuclei hazard for the individual crew member resembles the hazard from larger meteorites for the whole ship and both leave enough of a chance for survival to hearten the courageous to undertake space travel.

References

1. H. J. SCHAEFER, Exposure Hazard from Cosmic Radiation at Extreme Altitude and in Free Space. *J. Amer. Rocket Soc.* **22**, 277 (1952).
2. J. EUGSTER, Method for Demonstrating the Biological Effectiveness of Cosmic Radiation at High Altitudes. *J. Aviat. Med.* **24**, 222 (1953).
3. H. B. CHASE, Cutaneous Effects of Primary Cosmic Radiation. *J. Aviat. Med.* **25**, 388 (1954).
4. B. ROSSI, Interpretation of Cosmic-Ray Phenomena. *Rev. Mod. Physics* **20**, 537 (1948);
5. H. F. KAPLON, B. PETERS, H. I. REYNOLDS, and D. M. RITSON, Energy Spectrum of Primary Cosmic Radiation. *Physic. Rev.* **85**, 295 (1952).
6. J. A. VAN ALLEN, and S. F. SINGER, On the Primary Cosmic-Ray Spectrum. *Physic. Rev.* **78**, 819 (1950); **80**, 116 (1950).
7. R. A. ELLIS, M. B. GOTTLIEB, and J. A. VAN ALLEN, Low Momentum End of the Spectrum of Heavy Primary Cosmic Rays. *Physic. Rev.*, in Press.

Vo
1
19

Über den Transport von Translationsenergie bei Kurzzeitvorgängen

Von

H. J. Kaeppler, Stuttgart¹, ARS, BIS, GfW

(Eingelangt am 24. Dezember 1954)

Zusammenfassung. In vielen Fragen der angewandten Thermodynamik, insbesondere der Triebwerks-Thermodynamik, ist die Kenntnis des Wärmetransports von entscheidender Wichtigkeit. Dieses Problem wird um so wichtiger, je höher die in Frage kommenden Temperaturen sind. Nachdem erkannt wurde, daß bei den meisten thermochemischen und kernchemischen Reaktionen in Strahltriebwerken sich kein vollständiges Gleichgewicht einstellt, sind die üblichen Beziehungen zur Berechnung des Wärmetransportes nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Die Arbeit zeigt Überlegungen auf, die zu einer Modifikation des *translatorischen* Wärmeleitkoeffizienten führen. Es wird gezeigt, daß bei spontaner Anregung innerer Energieniveaus im Nicht-Gleichgewicht die durch elastische Stöße transportierte Energie kleiner ist als bei kinetischem Energietransport im Gleichgewicht. Auf eine hierdurch mögliche Auslöschung einer thermonuklearen Reaktion in kernchemischen Strahltriebwerken wird hingewiesen. Die Beziehungen für die Berechnung des Transports von Translationsenergie bei solchen Kurzzeitvorgängen werden angegeben.

Abstract. In many problems of applied thermodynamics, especially the thermodynamics of power plants, the knowledge of heat transport is of decisive importance. This particular problem becomes the more important, the higher the prevailing temperatures become. After it was realized that for most thermo-chemical and nuclear reactions in jet power plants there does not exist complete thermodynamic equilibrium, the conventional relations for the calculation of heat transport lose their applicability for such cases. Investigations are presented leading to a modification of the *translational* heat transport coefficient. It is shown that for spontaneous non-equilibrium excitation of internal energy levels the energy transported by elastic collisions is smaller than for the kinetic energy transport in the equilibrium case. The possibility of quenching thermonuclear reactions in nuclear jet power plants occurring thereby is indicated. The relations for the calculation of translational energy transport for such short-time processes are given.

Résumé. Dans beaucoup de questions de la thermodynamique appliquée, surtout dans la thermodynamique des propulseurs, la connaissance du transport de la chaleur est d'une importance décisive. Ce problème devient d'autant plus important que les températures utilisées sont élevées. Etant donné que dans la plupart des réactions thermochimiques et thermo-nucléaires survenant dans les réacteurs, l'équilibre complet n'est pas réalisé, il faut observer une certaine réserve quant à l'application des relations classiques au calcul du transport de la chaleur. Ici on présente quelques réflexions conduisant à une modification du coefficient de la conductibilité thermique *par translation*. On montre que dans le cas où les niveaux d'énergie intérieure sont excités spontanément sans que l'équilibre définitif soit établi, l'énergie transmise par des collisions élastiques est plus petite que dans le cas où le transport d'énergie cinétique se fait en équilibre. On fait voir la possibilité de faire éteindre par cet effet

¹ Forschungsinstitut für Physik der Strahltriebe e. V., Stuttgart-Flughafen.

une réaction thermo-nucléaire dans des réacteurs nucléaires. On rapporte les relations valables pour le calcul du transport d'énergie cinétique lors de tels événements d'une durée extrêmement limitée.

Die Grundgleichung der kinetischen Theorie der Transporterscheinungen in verdünnten Gasen ist die Integro-Differentialgleichung von MAXWELL-BOLTZMANN. Lösungen für diese werden unter anderen angegeben von ENSKOG und CHAPMAN [1] und GRAD [2]. Für quantenmechanische Systeme von Gasen geringerer Dichte wurde ein Analogon zur MAXWELL-BOLTZMANN-Gleichung zum erstenmal formuliert von NORDHEIM [3] und UHLING und UHLENBECK [4]. Neuere Arbeiten über die statistische Theorie der Transportvorgänge in Gasen stammen von MASON [5], ROSS und KIRKWOOD [6], sowie HIRSCHFELDER und Mitarbeitern [7].

Die CHAPMAN-ENSKOGSCHE Theorie basiert auf den Annahmen, daß nur Zweierstöße beim Transport maßgeblich sind, daß diese Zweierstöße elastisch erfolgen und durch die Methoden der klassischen Mechanik beschrieben werden können, und daß ferner das Feld der stoßenden Teilchen Kugelsymmetrie besitzt, das heißt, daß die Theorie nur für genügend große Verdünnung anwendbar ist, so daß noch keine Quanteneffekte berücksichtigt zu werden brauchen. Auch ist bekannt, daß die Theorie nur für einatomige Gase ohne jegliche innere Freiheitsgrade anwendbar ist und für den Fall der Anregung solcher beim Transport, sowie beim Transport der Anregungsenergie, versagt.

Für praktische Anwendungen wird vielfach eine vereinfachte Theorie des Wärmetransportes angenommen [8], die sich für den Fall von Gasen auch ganz gut bewährt hat. Diese vereinfachte Theorie soll im folgenden zugrunde gelegt und der Versuch gemacht werden, sie für den Fall des Wärmetransportes bei Kurzzeitvorgängen zu modifizieren.

Grundsätzlich handelt es sich beim translatorischen Energietransport um einen Impulsaustausch [9]. Jedoch kann man den Vorgang dieses Energietransports als einen Diffusionsvorgang schematisieren und mit der Voraussetzung spontaner Gleichgewichtseinstellung ohne Berücksichtigung der Elementarprozesse bei der Energieaufnahme und Abgabe betrachten. Dies geschieht etwa folgendermaßen [10]: Durch den örtlichen Niveauunterschied herrscht ein Potential

$$\varphi = -\text{grad } E, \quad (1)$$

wobei E die innere Energie ist. Die Existenz eines solchen Potentials ruft einen Ausgangsvorgang hervor, welcher als eine Art Diffusion verläuft, das heißt Teilchen des höheren Energieniveaus diffundieren zu solchen niedrigeren Niveaus und geben dort ihre Energie durch Stoß ab. Ist A_ϵ die Besetzungswahrscheinlichkeit für die (diskrete) Energie ϵ , dann ist $E = \epsilon A_\epsilon$, oder, wegen $C^i = \partial E / \partial T$ folgt $\epsilon \partial A_\epsilon / \partial T = C^i$, wobei C^i die innere spezifische Wärme ist. Die übertragende Energie ist $N \cdot \epsilon$, wobei N die Zahl der beteiligten Teilchen ist. Damit gilt für den Energietransport

$$W = N \cdot D \cdot \text{grad } E = \epsilon N \cdot D \cdot \text{grad } A_\epsilon = \epsilon N \cdot D \cdot \partial A_\epsilon / \partial T \cdot \text{grad } T = N \cdot D \cdot C^i \cdot \text{grad } T. \quad (2)$$

Interpretativ ist N diejenige Zahl der Teilchen, deren translatorische Freiheitsgrade durch Stoß mit Energie aufgefüllt werden. D ist der Diffusionskoeffizient. Wegen $D = \lambda \bar{v} / 3$, wobei λ die mittlere freie Weglänge, $\bar{v} = \sqrt{(8 k T / \pi M)}$ die mittlere Geschwindigkeit, k die BOLTZMANNSCHE Konstante, T die Temperatur und M die Teilchenmasse ist, folgt

$$\alpha = N \cdot \frac{1}{3} \lambda \bar{v} \cdot C^i = \frac{N \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot k^{1/2} T^{1/2}}{3 \cdot \pi^{1/2} M^{1/2}} C^i = \frac{\epsilon}{3} \cdot \lambda \cdot \bar{v} (\partial A_\epsilon / \partial T) N. \quad (3)$$

Beim Transport translatorischer Energie ist $E = 3/2 k T$, also eine Funktion der Temperatur, und damit $\partial(\epsilon A_\epsilon)/\partial T = \epsilon \cdot \partial A_\epsilon/\partial T + A_\epsilon \partial \epsilon/\partial T$. Besitzen fernerhin alle Teilchen im höheren Energieniveau nur translatorische Freiheitsgrade, so ist $A_\epsilon = \text{const.} = 1$ und $\partial(\epsilon A_\epsilon)/\partial T = (3/2) k$. Damit folgt für (3) die Beziehung

$$\chi_{tr} = \frac{N}{3} \lambda \bar{v} \cdot C^i = \frac{N}{3} \lambda \bar{v} \cdot \frac{3}{2} k = \frac{N}{3} \lambda \bar{v} \cdot f_{tr} \cdot \frac{k}{2}, \quad (3 \text{ a})$$

wobei $f_{tr} = 2 h + 1 = 3$ die Zahl der (translatorischen) Freiheitsgrade des Teilchens ist. Man hat hier sofort die bekannte Relation $C^i = f(k/2)$, wobei f allgemein die Zahl der Quasi-Freiheitsgrade ist. Durch Einführung des bekannten Ausdrucks für die MAXWELLSche mittlere freie Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{4 \sqrt[4]{2Qn}},$$

mit Q = Wirkungsquerschnitt des Stoßes, n = Zahl aller (pro Raumeinheit) vorhandenen Teilchen, folgt

$$\chi_{tr} = \frac{N}{n} \frac{\bar{v} C^i}{3 \cdot 4 \sqrt[4]{2Q}} = \frac{k^{3/2} T^{1/2} f}{3 \cdot \pi^{1/2} \cdot 4 \cdot Q \cdot M^{1/2}}. \quad (3 \text{ b})$$

An dieser Stelle seien einige allgemeine Bemerkungen über die Zuordnung von freier Weglänge und mittlerer Translationsgeschwindigkeit erlaubt. Wie aus der kinetischen Gastheorie bekannt [11], ist die Zuordnung dieser beiden Größen gegeben durch

$$\begin{aligned} Z &= \pi D^2 n \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^3 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int v_r e^{-m(v_x^2 + V_y^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z dV_x dV_y dV_z = \\ &= 2 \sqrt[4]{2\pi D^2 n} \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \\ v_r &= \sqrt{(V_x - v_x)^2 + (V_y - v_y)^2 + (V_z - v_z)^2}; \quad D^2 = \frac{4Q}{\pi}; \quad Z = \frac{\bar{v}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Damit ist eine der beiden genannten Größen frei wählbar und dadurch die andere festgelegt. Es soll hier im besonderen zwischen der *mittleren* Geschwindigkeit und der *effektiven* Geschwindigkeit (oder Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrats) unterschieden werden. Aus der kinetischen Gastheorie folgt ferner für die freie Weglänge die MAXWELLSche *mittlere* freie Weglänge. Damit erhält man zunächst folgende Zuordnung aus der obigen Relation:

$$\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi M}, \quad \lambda = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot Q \cdot n}}, \quad (4 \text{ a})$$

und für die *effektiven* Quantitäten folgt dann gemäß (4 a) und $\lambda_{eff} v_{eff} = \lambda \bar{v}$,

$$v_{eff} = \sqrt{3kT/M} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}, \quad \lambda_{eff} = \frac{1}{2 \sqrt{(3\pi) \cdot Q \cdot n}}. \quad (4 \text{ b})$$

Wie sich im folgenden noch zeigt, dürfte es hier günstiger sein, mit den effektiven Werten zu rechnen.

Es war bisher allgemein üblich, und durch Annahme spontaner Gleichgewichtseinstellung gerechtfertigt, daß man die Zahl der durch Stoß mit Translationsenergie aufgefüllten Teilchen N und die Gesamtteilchenzahl n gleichsetzt. Daher resultiert die bisher bekannte Druckabhängigkeit des translatorischen Wärmeleitkoeffizienten.

Das Gleichsetzen dieser beiden Teilchenzahlen ist jedoch nicht mehr zutreffend, wenn man von der Annahme spontaner Gleichgewichtseinstellung abgeht. Man kann sich zum Beispiel vorstellen, daß bei kurzzeitigen Aufheizungsvorgängen sehr schnelle Teilchen eine große Zahl von unelastischen Stößen abgeben, wobei ein merklicher Betrag der Translationsenergie durch Anregung innerer Energieniveaus aufgezehrt wird. Man kann sich nun weiter vorstellen, daß zum Beispiel der thermischen Schwirrbewegung der Teilchen eine gerichtete Systembewegung überlagert sei, die stark ins Gewicht fallen soll. Da die Einstellung des Gleichgewichts der einzelnen Freiheitsgrade immer eine endlich große Zeit erfordert [12, 13], können die angeregten Teilchen längst die betrachtete Umgebung verlassen haben, bevor sie auch nur einen Bruchteil ihrer inneren Energie wieder abgegeben haben. Die Anwendung der Gl. (3) auf solche und ähnliche Fälle würde somit zu falschen Resultaten für den Transport translatorischer Energie führen. Gegenstand dieser Überlegungen soll es nun sein, eine Modifikation der Gleichung für den Transport von Translationsenergie für den Fall von Kurzzeitvorgängen anzugeben. Für die Fälle des vollkommenen thermodynamischen Gleichgewichts und des Fehlens innerer Freiheitsgrade muß dann die klassische Beziehung als Grenzfall resultieren.

Ein charakteristischer Kurzzeitvorgang ist die Verbrennung eines reaktionsfähigen Gemisches. Nach der SÄNGERSCHEN Lumineszenzhypothese [14, 15] verläuft diese Reaktion im einzelnen etwa folgendermaßen: Das reaktionsfähige Gemisch habe eine Anfangstemperatur (vor der Reaktion) T_0 und einen Anfangsdruck p_0 . Beim Freiwerden der Reaktionsenergie E verteilt sich diese auf die translatorischen Freiheitsgrade der in der unmittelbaren Umgebung vorhandenen Teilchen der Masse M , so daß diese zunächst eine homogene Geschwindigkeitsverteilung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2E/M} = \sqrt{3kT/M}$ erhalten. Wie aus der kinetischen Gastheorie bekannt, stellt sich nach etwa 10 Stößen eine stabile, temporäre MAXWELL-Verteilung der Translationsgeschwindigkeiten, entsprechend einer Temperatur $T_1 = T_0 + 2E/3k$, ein. Die mittlere Geschwindigkeit dieser Verteilung ist $\bar{v}_1 = \sqrt{8kT_1/\pi M}$, die effektive Geschwindigkeit $(v_1)_{\text{eff}} = \sqrt{3kT_1/M} = v_0$. Da die Einstellung der Verdrängungsarbeit wesentlich mehr Stöße erfordert, läuft eine solche Reaktion als *isochorer* Vorgang ab. Erst bei etwa 10^5 Stößen ist mit völligem Ausgleich an den Umgebungsdruck zu rechnen.

Während dieser Anfangsperiode hat man für die innere spezifische Wärme C' diejenige für einen isochoren Vorgang

$$(\partial E / \partial T)_V = C'_{(V)}$$

zu nehmen, während danach, wenn die gesamte makroskopische Reaktion isobar verläuft, die isobare innere spezifische Wärme

$$(\partial E / \partial T)_p = C'_{(p)}$$

aus Konvenienzgründen anzuwenden ist. Für den Transport rein translatorischer Energie sind beide gleich $(3/2)k$, so daß dieser Unterschied hier nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Durch das Einstellen der MAXWELL-Verteilung besitzt eine gewisse Zahl von Teilchen derartige Translationsgeschwindigkeiten, daß die resultierenden Stoßgeschwindigkeiten zur Anregung innerer Freiheitsgrade, diskreter und auch kontinuierlicher elektronischer Energieniveaus fähig sind. Alle diejenigen Stöße, die zur Anregung innerer Energie dienen, dürfen also für den Transport translatorischer Energie nicht gezählt werden.

Die weitere Einstellung der einzelnen Freiheitsgrade [7] erfolgt für Rotation etwa nach 10^3 Stößen ($T_2 = T_0 + 2/5 \cdot E/k$ für 2-atomige und 3-atomige gestreckte Moleküle, $T_2 = T_0 + 2/6 \cdot E/k$ für 3-atomige gewinkelte Moleküle) und für Oszillation und Druckausgleich etwa nach 10^5 Stößen ($T_3 = T_0 + 2/9 \cdot E/k$ für 2-atomige, $T_3 = T_0 + 2/16 \cdot E/k$ für 3-atomige Moleküle), wenn nicht durch Resonanz eine außerordentlich rasche Einstellung des Rotations- und Oszillationsgleichgewichts eintritt [16], für Dissoziation nach etwa 10^7 und für Ionisation etwa nach 10^9 Stößen (entsprechend $T = T_3 - n_0/k[\delta Q_{dis} + aQ_{ion} + (\delta + a)3/2kT]$, n_0 = ursprüngliche Teilchenzahl, δ, a = Dissoziations- bzw. Ionisationsgrad, Q_{dis}, Q_{ion} = Dissoziations- bzw. Ionisationsenergie, $(\delta + a)3/2kT$ = aufgewandte Energie, um die Dissoziations- bzw. Ionisationsprodukte in translatorisches Gleichgewicht mit ihrer Umgebung zu bringen). Die Einstellung des Rotations- und Oszillationsgleichgewichts geschieht also, noch während die Reaktion einen isochoren Ablauf zeigt.

Derartige Vorgänge sind von Interesse nicht nur für chemische Verbrennung in den bisher üblichen Strahltriebwerken, sondern auch für kernchemische Reaktionen in thermischen Atomraketen [17, 18], Photonenraketen [19, 20] und besonders für sogenannte reine Atomraketen mit Schutzgashülle [21, 22, 23].

Zu Anfang des zu betrachtenden Vorgangs sei eine homogene Geschwindigkeitsverteilung der Geschwindigkeit v_0 vorgegeben. Man gelangt somit zu der trivialen Aussage

$$w_0(v = v_{hom}) = 1, \quad w_0(v \neq v_{hom}) = 0$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_0(v)$ dieser Geschwindigkeitsverteilung. Nach einer gewissen Zahl soll sich eine MAXWELL-Verteilung $w_1(v)$ einstellen,

$$w_1(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_w} \right)^2 \cdot e^{-\left(v/v_w\right)^2},$$

mit $v_w = \sqrt{2kT/M}$ als wahrscheinlichster Geschwindigkeit. Der Übergang zwischen den beiden Verteilungen ist gegeben durch

$$w(v) = w_1(v) + R(\tau) [w_0(v) - w_1(v)], \quad (5)$$

wobei $R(\tau)$ die „Relaxationsfunktion“ mit den Randbedingungen $R_0(\tau) = 1$ und $R_1(\tau) = 0$ für Anfang und Ende des Relaxationsvorgangs ist. Nimmt man zum Beispiel einen exponentiellen Übergang entsprechend $e^{-\tau}$ an, so folgt als mittlere Geschwindigkeitsverteilung während des Relaxationsvorgangs

$$\bar{w}(v) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (w_1(v) + [w_0(v) - w_1(v)] e^{-\tau}) d\tau = w_1(v) + [w_0(v) - w_1(v)] \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-\tau} d\tau, \quad (6)$$

wobei τ ein Maß für die Zeit während der Relaxation ist. Wenn es erlaubt ist, τ bei der oberen Integrationsgrenze gegen unendlich streben zu lassen, dann folgt wegen

$$\bar{w}(v) = w_1(v) + [w_0(v) - w_1(v)] \left(\frac{1}{\tau} - \frac{e^{-\tau}}{\tau} \right) \Big|_0^\infty = w_1(v) \quad (7)$$

die MAXWELL-Verteilung als mittlere Verteilung für den Relaxationsvorgang. Die jeweilige mittlere Geschwindigkeit \bar{v} folgt durch Integration über Gl. (5) aus

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v (v/v_{w_1})^2 e^{-(v/v_{w_1})^2} d(v/v_{w_1}) [1 - R(\tau)] + v_0 R(\tau)$$

zu

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_{w_1} \cdot \frac{1}{2} [1 - R(\tau)] + v_0 R(\tau) = \bar{v}_1 [1 - R(\tau)] + v_0 R(\tau), \quad (8)$$

oder, wegen $v_{w_1} = \sqrt{2 k T/M}$, $\bar{v}_1 = \sqrt{8 k T/\pi M}$, $v_0 = v_{eff} = \sqrt{3 k T/M}$, zu
 $\bar{v} = \bar{v}_1 + R(\tau) \cdot 0,078 v_{eff} = \bar{v}_1 [1 + 0,085 \cdot R(\tau)]. \quad (8 \text{ a})$

Für den Fall der Gl. (7) erhält man als mittlere Geschwindigkeit, gemittelt über den gesamten Relaxationsvorgang, $\bar{\bar{v}} = \bar{v}_1 = \sqrt{8 k T/\pi M}$. Einfacher sind die Verhältnisse für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, das heißt für die effektive Geschwindigkeit. Man hat dann nämlich

$$v_0 = v_{hom} = v_{eff} = (v_1)_{eff} = \sqrt{\bar{v}_1^2} = \sqrt{3 k T/M}.$$

Wie man leicht zeigen kann, bleibt die effektive Geschwindigkeit für den gesamten Relaxationsvorgang konstant. Dieser Umstand ist für die Berechnung des translatorischen Wärmeleitungskoeffizienten von Vorteil, so daß es empfehlenswert ist, hier mit den effektiven Größen (Gl. (4 b)) anstelle der mittleren (Gl. (4 a)) zu rechnen.

Die überaus starken, kurzezeitigen und örtlichen Temperatursteigerungen führen bei Stoßvorgängen zur Anregung der inneren Energieniveaus. Die Beziehung zwischen der durch den plastischen Stoß übertragenen Energie ϵ und der relativen Stoßgeschwindigkeit v_{rs} ist unter Berücksichtigung des Impulsatzes wie bekannt gegeben durch $v_{rs}^2 = 2 \epsilon/m$, wobei m die reduzierte Masse $M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ des stoßenden Systems, M_1 und M_2 die jeweiligen Massen der Stoßpartner sind. Die erforderlichen Energien zur Anregung der einzelnen Freiheitsgrade sind bekannt [24, 25]. Zunächst soll die Anregung kontinuierlicher Niveaus betrachtet werden. Hier führen, wenn man zunächst einen Ausbeutefaktor $\sigma = 1$ annimmt, alle Stöße über einer erforderlichen Minimal-Stoßgeschwindigkeit v_{rs} zur Anregung. Nach der statistischen Mechanik folgt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte der relativen Stoßgeschwindigkeit bei Voraussetzung einer MAXWELL-Verteilung,

$$w(v_{rs}) dv_{rs} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} (v_{rs}/v_w)^2} (v_{rs}/v_w)^3 d(v_{rs}/v_w), \quad (9)$$

die Wahrscheinlichkeit einer relativen, minimalen Stoßgeschwindigkeit, bzw. der Erwartungswert für die Zahl der Stöße, die zur Anregung eines Kontinuums führen,

$$N_c'/n = \bar{\sigma}_c \int_{v_{rs}/v_w}^{\infty} w(v_{rs}/v_w) d(v_{rs}/v_w) = \bar{\sigma}_c \left[1 + \frac{1}{2} (v_{rs}/v_w)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} (v_{rs}/v_w)^2}, \quad (10)$$

wobei

$$v_w = \sqrt{[v_{w_A}^2 + v_{w_B}^2]/2}, \quad v_{w_A} = \sqrt{2 k T_A/M_A}, \quad (11)$$

die wahrscheinlichste Geschwindigkeit und $\bar{\sigma}_c$ ein gemittelter Ausbeutefaktor für die Anregung der kontinuierlichen Energieniveaus ist. Der Ausdruck (11) für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w trägt dem Umstand Rechnung, daß die Stoßgeschwindigkeiten der jeweiligen Stoßpartner infolge verschiedener Translationstemperaturen und Massen verschieden sein können. Für die Anregung diskreter Energie-Niveaus wird angenommen, daß aus dem Spektrum der Stoßgeschwindigkeiten ein bestimmtes Band $v_{rs}^i + \Delta v_{rs}$ mit der Bandbreite Δv_{rs} zur Anregung führt. v_{rs}^i ist dabei die minimal erforderliche Anregungs-

VOL
1
1955

geschwindigkeit. Die Zahl N'_i der Stöße, die zur Anregung eines bestimmten diskreten Niveaus i führen, folgt mit Hilfe von Gl. (10) sofort zu

$$N'_i/n = \sigma_i \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{rs}^i + \Delta v_{rs}}{v_w} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left((v_{rs}^i + \Delta v_{rs}) v_w \right)^2} - \left[1 + \frac{1}{2} (v_{rs}^i / v_w)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} (v_{rs}^i / v_w)^2} \right\}, \quad (12)$$

wobei σ_i der Ausbeutefaktor zur Anregung des i -ten Niveaus durch die Stoßgeschwindigkeiten $v_{rs}^i + \Delta v_{rs}$ ist. Zweckmäßigerweise wird man hier benachbarte Anregungsstufen zusammenfassen und bei der Berücksichtigung von Serien wie bei der Berechnung von Zustandssummen (in Beziehung auf das Abbrechen der Serie) verfahren.

Für das Übergangsgebiet von homogener Geschwindigkeitsverteilung zur MAXWELL-Verteilung erhält man die jeweilige Wahrscheinlichkeitsdichte der relativen Stoßgeschwindigkeiten zur Ermittlung anregender Stöße mit Hilfe von Gl. (5), wenn man dort anstelle von $w_1(v)$ nun $w_1(v_{rs})$ und für $w_0(v)$ nun $w_0(v_{rs})$ einsetzt. Erstere Stoßgeschwindigkeitsverteilung ist durch Gl. (9) gegeben. Wie einfache Überlegungen zeigen, ist die Verteilung der relativen Stoßgeschwindigkeiten bei homogener Verteilung der Translationsgeschwindigkeiten gegeben durch

$$w_0(v_{rs}/2v) d(v_{rs}/2v) = \frac{1}{v} \left(\frac{v_{rs}}{2v} \right) d(v_{rs}/2v), \quad (13)$$

$$0 \leq v_{rs} \leq 2v, \quad v = v_{hom}.$$

Daraus ergibt sich durch Integration der Erwartungswert

$$N'/n = 1 - (v_{rs}/2v)^2 \quad (14)$$

einer minimalen relativen Stoßgeschwindigkeit, bzw. die Zahl der anregenden Stöße für eine gegebene minimale Anregungsenergie.

Durch die Anregung innerer Freiheitsgrade wird dem System Translationsenergie entzogen, das heißt, daß sich nach jedem plastischen Stoß die MAXWELL-Verteilung der Translation neu einstellen muß. Hierfür muß nun der Verlauf der Temperatur bekannt sein, damit man die jeweilige wahrscheinlichste Geschwindigkeit berechnen kann. Man könnte nun wieder die jeweiligen, instationären Übergänge betrachten. Jedoch würde dies zu einer sehr großen Komplikation des Verfahrens führen. Es soll deshalb die Annahme gemacht werden, daß im Zeitintervall jedes einzelnen Stoßes eine stabile MAXWELL-Verteilung existiert. Der gesamte Temperaturverlauf ergibt sich dann sofort auf Grund der bisherigen Überlegungen zu

$$T = T_0 + \frac{2E}{3k} - (N_{rot}'/n) \frac{E_{rot}}{k} - (N_{osz}'/n) \frac{E_{osz}}{k} - (N_{dis}'/n) \frac{E_{dis}}{k} - \sum_i (N'_i/n) \frac{E_i}{k} - \sum_c (N'_c/n) \frac{E_c}{k}. \quad (15)$$

Hier bedeuten die N' die Zahlen der bereits erfolgten Stöße, die zur Anregung der jeweiligen inneren Freiheitsgrade führen. Bei der numerischen Berechnung muß also jeweils ein approximativ schrittweises, bzw. iteratives Verfahren angewandt werden, da hier ein simultanes System der Gln. (10), (12) und (15) vorliegt.

Der Erwartungswert für die Zahl der Stöße, die elastisch verlaufen, wird dann

$$\frac{N}{n} = 1 - \sum_c \frac{N'_c}{n} - \sum_i \frac{N'_i}{n}, \quad (16)$$

und damit folgt für den Koeffizienten des Transports translatorischer Energie

$$\kappa_{tr} = \left[1 - \sum_c N_c' / n - \sum_i N_i' / n \right] \cdot \kappa_{klass}, \quad (17)$$

wobei κ_{klass} durch Gl. (3) gegeben ist.

Es wäre nun die Frage zu erörtern, wie sich eingestellte Gleichgewichte auf die obige Gl. (17) auswirken. Hat sich für einen bestimmten Freiheitsgrad ein Gleichgewicht ausgebildet, so wird die innere Energie wiederum durch Stöße weitergegeben und fällt wieder für die translatorischen Freiheitsgrade ins Gewicht. Die Berücksichtigung dieser Gleichgewichtseinstellung kann demzufolge so durchgeführt werden, daß die Stöße in dem Geschwindigkeitsintervall, in dem das betreffende Niveau liegt, nicht mehr als Verlust für die Translationsenergie zu rechnen sind. Diese Niveaus sind also von der Summation in Gl. (14) auszuschließen. Will man einen kontinuierlichen Verlauf der Gleichgewichtseinstellung betrachten, so sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten N_i' / n und N_c' / n mit entsprechenden Relaxationsfunktionen $R_i(\tau)$ und $R_c(\tau)$ zu behaften, für welche dieselben Randbedingungen wie für $R(\tau)$ aus Gl. (5) gelten. Damit folgt nun endgültig für den translatorischen Wärmeleitkoeffizienten

$$\kappa_{tr} = \left[1 - \sum_c R_c(\tau) \frac{N_c'}{n} - \sum_i R_i(\tau) \frac{N_i'}{n} \right] \frac{k^{3/2} \cdot T^{1/2}}{4 \cdot \pi^{1/2} \cdot Q \cdot M^{1/2}}, \quad (18)$$

wobei T wiederum durch (15) gegeben ist. Weiterhin wäre noch zu unterscheiden zwischen den verschiedenen Querschnitten für Stöße mit verschiedenen Teilchen. Eine Übersicht hierüber findet man bei MAECKER [26].

Die vorstehenden Überlegungen sind nun von Interesse für verschiedene Anwendungen. Sie geben zunächst einen Aufschluß über die Verteilung translatorischer Energie bei kurzezeitigen, exothermen Reaktionen. Aus Gl. (18) zusammen mit Gl. (5) läßt sich erkennen, daß beim Übergang von homogener Geschwindigkeit zur MAXWELL-Verteilung die *transportierte* Translationsenergie zunächst abnimmt, während jedoch selbstverständlich die *zu transportierende* Energie gleich bleibt. Der Grund ist die Anregung innerer Freiheitsgrade. Selbst bis zur Einstellung des Rotationsgleichgewichts hinaus erfolgt eine starke Auffüllung innerer Freiheitsgrade mit Energie, die damit der Translation verloren geht. Bei derartigen Kurzzeitvorgängen ist also der translatorische Wärmeleitkoeffizient kleiner als im thermischen Gleichgewicht und damit ist auch die Quasi-Temperatur¹ in den Randzonen um den Reaktionskern kleiner. Infolge fehlender Gleichgewichtseinstellung für innere Freiheitsgrade kommt ein Transport dieser inneren Energie durch Diffusion der Teilchen und Energieabgabe im Dreierstoß nicht in Frage. Die verschiedenen Anteile des Wärmeleitkoeffizienten können also bei derartigen Vorgängen mit sehr raschen Reaktionen und sehr kurzen örtlichen Aufenthaltsdauern merklich kleiner sein als bei vollständigem thermischem Gleichgewicht. Die beobachteten höheren Wärmeübergänge bei Kurzzeitvorgängen [7] könnten also diesen Überlegungen zufolge nur durch Strahlung erklärt werden. Erwähnenswert ist ferner noch, daß die Druck-

¹ In Abwesenheit einer Gleichgewichtseinstellung kann die Energieverteilung von der wahrscheinlichsten abweichen und damit verliert der Begriff der Temperatur seinen Sinn. Für die meisten der exothermen Reaktionen wird angenommen, daß für die translatorischen Freiheitsgrade annäherndes Gleichgewicht besteht, jedoch dehnt sich dieser Zustand während der Reaktion zunächst noch nicht auf die inneren Freiheitsgrade aus. Man kann hier deshalb eine „Quasi-Temperatur“ durch die translatorische Energie allein definieren.

unabhängigkeit des translatorischen Wärmeleitkoeffizienten auch in Gl. (18) erhalten ist.

Für den Fall reiner Atomraketen mit Schutzgasanwendung dürfte das hier Ausgeführte von besonderem Interesse sein. Es ist nämlich ersichtlich, daß immer dort die transportierte Translationsenergie absinkt, wo die Anregung innerer Freiheitsgrade ohne sofortige Gleichgewichtseinstellung erfolgen kann. Dadurch kann an solchen Stellen z. B. eine thermonukleare Reaktion zum Erlöschen gebracht werden. Ferner dürften an solchen Stellen zunächst starke Reduktionen der Quasi-Temperatur und damit zunächst eine Reduktion des Wärmeübergangs eintreten, was bereits in einer früheren Untersuchung des Verfassers [21, 22, 23] vermutet wurde. Dieser Effekt könnte durch Reduzierung der örtlichen Aufenthaltsdauern, also Überlagerung starker Systembewegungen (wie sie in der genannten Arbeit des Verfassers vorgeschlagen wurde), noch erhöht werden.

Die Inangriffnahme dieser Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr. K. H. HÖCKER angeregt. Der Verfasser dankt dem Leiter des Forschungsinstituts für Physik der Strahltriebe, Herrn Dr. E. SÄNGER, und Frau Dr. I. SÄNGER-BREDT für das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse sowie für wertvolle Diskussionen.

Vol.
1
—
1955

Literaturverzeichnis

1. S. CHAPMAN und T. G. COWLING, Mathematical Theory of Non-uniform Gases. Cambridge: University Press, 1952.
2. H. GRAD, Commun. Pure Appl. Math. **2**, 331 (1949).
3. L. NORDHEIM, Proc. Roy. Soc. London A, **119**, 689 (1928).
4. E. A. UHLING und G. E. UHLENBECK, Physic. Rev. **43**, 552 (1933).
5. E. A. MASON, J. Chem. Physics **22**, 169 (1954).
6. J. ROSS und J. G. KIRKWOOD, J. Chem. Physics **22**, 1094 (1954).
7. J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS und R. B. BIRD, Molecular Theory of Gases and Liquids. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1954.
8. E. H. KENNARD, Kinetic Theory of Gases, S. 163. New York: McGraw Hill, 1938.
9. J. MEIXNER, Z. Naturforsch. **8a**, 69 (1953).
10. K. H. RIEWE und R. ROMPE, Z. Physik **105**, 478 (1937).
11. R. B. LINDSAY, Physical Statistics, S. 86. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1941.
12. R. DE L. KRONIG, Physik. Z. **39**, 823 (1938).
13. J. MEIXNER, Z. Naturforsch. **4a**, 594 (1949).
14. E. SÄNGER, P. GOERCKE und I. BREDT, Z. physik. Chem. **199**, 46 (1952).
15. E. SÄNGER, Weltraumfahrt **5**, 4 (1954).
16. K. E. SHULER, J. Chem. Physics **18**, 1466 (1950).
17. I. SÄNGER-BREDT, Z. Naturforsch. **8a**, 796 (1953).
18. I. SÄNGER-BREDT, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.
19. E. SÄNGER, Ing.-Arch. **21**, 213 (1953).
20. E. SÄNGER, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.
21. H. J. KAEPPeler, Forschungsreihe der Gesellschaft für Weltraumforschung, Bericht Nr. 12. Stuttgart: 1953.
22. H. J. KAEPPeler, in: Probleme der Weltraumforschung. Biel: Laubscher, 1955.
23. H. J. KAEPPeler, J. Amer. Rocket Soc. **24**, 316 (1954).
24. H. SPONER, Molekülspektren. Berlin: Springer, 1935.
25. R. F. BACHER und S. GOUDSMIT, Atomic Energy States. New York: McGraw-Hill, 1932.
26. H. MAECKER, Der elektrische Lichtbogen, in: Ergebn. exakt. Naturwiss. **25**, 293 (1951).

Artificial Satellite, Unification and Mechanics (Sidar-Mechanics)

By

A. Boni, Rome¹, AIR

(With 5 Figures)

(Received August 7, 1954)

Abstract. It is pointed out that an artificial satellite presents a number of mechanical problems which form a new and characteristic branch of science. Some of these problems are discussed in this paper.

The opportunity of introducing a nomenclature which would briefly indicate the subjects pertaining to artificial satellites is stressed. An example is the word "sidar", from which convenient derivatives can be formed, as "sidar-mechanics", divided into external, internal and correlative, with analogies with ballistics.

One of the problems reviewed herein concerns unification of the orbits. The reasons for simplicity in identifying the orbits, and in the control of tolerances and safety which suggest unification, are given. Bases for such unification are discussed, stressing the utility of placing the orbits in correspondence with the series of whole numbers (for harmony and symmetry), and, to be more exact, by the adoption of a geometric progression for the times of revolution, which has an approximate analogy in the times of the planets of the solar system.

As an example of internal sidar-mechanics, this paper gives some indications regarding the fields of force on-board sidar-stations which must be taken into account in the construction, assembly of the parts, and design of the apparatus.

Successive improvements should determine, with sufficient approximation, the gravitational fields for a definition of the tolerances in the orbits of sidar-stations in order to ensure the security of sidar-ship traffic.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß ein künstlicher Satellit eine Reihe mechanischer Probleme darbietet, die einen neuen und charakteristischen Wissenschaftszweig bilden. Einige dieser Probleme werden in der vorliegenden Arbeit diskutiert.

Es wird die Gelegenheit hervorgehoben, eine neue Nomenklatur einzuführen, die in Kurzform die Begriffe bezeichnet, die sich auf künstliche Satelliten beziehen. Ein Beispiel dafür ist das den künstlichen Satelliten bezeichnende Wort „Sidar“, von dem passende Ableitungen gebildet werden können, wie z. B. „Sidar-Mechanik“, die in Analogie zur Ballistik in eine „äußere“, „innere“ und „korrelative“ Gruppe eingeteilt werden kann.

Eines der hier behandelten Probleme betrifft die Vereinheitlichung (Regelung) der Umlaufbahnen. Die Gründe für diese Normierung betreffen die Einfachheit in der Identifizierung der Umlaufbahnen und in der Kontrolle von Toleranzen und Sicherheit. Die Grundlagen für eine solche Regelung werden diskutiert. Dabei wird die Zweckmäßigkeit betont, die Umlaufbahnen in Übereinstimmung mit der Reihe ganzer Zahlen (zwecks Harmonie und Symmetrie) zu bringen. Es soll ferner eine geometrische Progression für die Umlaufzeiten gewählt werden, wozu eine angehöhere Analogie in den Umlaufzeiten der Planeten des Sonnensystems vorliegt. Als

¹ Via G. Sisco 7, Roma, Italia.

ein Beispiel für innere Sidar-Mechanik bringt die vorliegende Arbeit einige Angaben hinsichtlich der Kraftfelder an Bord von Sidar-Stationen, die bei der Konstruktion, der Zusammensetzung der Teile und dem Entwurf der Apparate in Rechnung bezogen werden müssen.

Allmähliche Verbesserungen sollten mit genügender Annäherung die Gravitationsfelder für eine Definition der Toleranzen bei den Umlaufbahnen von Sidar-Stationen bestimmen, um die Sicherheit des Sidar-Schiffsverkehrs zu gewährleisten.

Résumé. On montre qu'un satellite artificiel soulève une série de problèmes mécaniques qui constituent une branche nouvelle et caractéristique de la science. Certains de ces problèmes sont discutés au cours du présent article.

On souligne l'opportunité d'introduire une nomenclature qui caractérise brièvement les divers concepts relatifs aux satellites artificiels. Un exemple est le mot "Sidar" (le satellite artificiel), qui pourra donner naissance à toute une famille de mots, notamment "la mécanique du sidar", qui, par analogie avec la balistique, se divisera en 3 variétés: externe, interne et corrélative.

Un des problèmes envisagés est celui de *l'unification*, autrement dit de *la normalisation des orbites*, qui se justifie par des raisons de simplicité dans l'identification des orbites et pour le contrôle des tolérances et de la sécurité. Les bases de cette unification sont discutées, montrant l'utilité de mettre la série des orbites en concordance avec la suite naturelle des nombres entiers, et cela pour des considérations d'harmonie et de symétrie. On choisira en outre une progression géométrique pour les durées de révolution, dont celles des planètes donnent une analogie approximative. Comme exemple de ce qu'est la "mécanique interne du Sidar", le présent article apporte quelques données concernant les champs de force à bord d'une "station de Sidar", dont il faut tenir compte dans la construction, dans la combinaison des éléments et dans le projet des appareils.

Des progrès successifs de cette science permettront de déterminer avec une suffisante approximation les champs de gravitation, pour pouvoir définir les tolérances sur les orbites des "stations de Sidar" et pour assurer ainsi la sécurité du trafic des "vaisseaux-Sidar".

"..quis est, qui complet aures meas tantus et tam dulcis sonus?" "Hic est", inquit, "ille, qui intervallis disiunctus imparibus, sed tamen pro rata parte ratione distinctis, impulsu et motu ipsorum orbium efficitur et acuta cum gravibus temperans varios aequabiliter concentus efficit; . . ."

Cicero, "Somnium Scipionis" (51 A.A. Chr. N.).

I. Introduction

1. The Subject

An artificial satellite, whether considered as an orbital station or an automatic base for observations or operations, presents a whole series of mechanical problems of theoretical and technical nature that constitute a new branch of science. Any attempt to deal with this branch in an organic manner shows that at the present stage we do not possess a sufficient number of partial studies that could be joined together to form a whole. The following pages are to constitute a contribution to the solution of some of the problems that are met in this new field of endeavour.

2. The Nomenclature

It appears advisable to create a possibility of indicating in a succinct manner the various sectors of the studies concerning artificial satellites or, generally speaking, any artificial bodies meant to move through the celestial spaces. It is

Vol.
1
1955

believed that an acceptable terminology could be worked out combining suitably the roots of the various pertinent words, and therefore some examples of a nomenclature that could be studied and improved by linguists are suggested in this paper.

First of all, the root "sid" shall be adopted as in "sidareal", i. e. pertaining to astral bodies (no matter whether endowed with their own or with reflected light).

The next root is "ar", as in "artificial", i. e. built (of parts put together).

The two roots can be combined in the following manner:

Sidar = Sid-ar = sidareal — artificial.

To be precise, "sidar" is the name given to a body while "sidareal" will constitute the adjective. This will make clear the meaning of the following compound words: sidar-mechanics, -technics, -construction, -electronics, -navigation, -control, -conditioning, -unification, etc.

The word "sidar" reminds us of an analogous (but less explicit) word "radar" (*RADio Detection And Ranging*).

It does not seem that the word "astronautics" is likely to exclude "sidar", because the former contains the ideas of "astro" and "nautics" which are different from the ideas embodied in the latter. The former term has only a few derivations based on the "nautics" part, such as "astro-navis" (= "astro-ship") or "astro-navigation". The derivations taken from the word "astro" alone (astronomy, astrophysics) embrace, instead, a field that is outside the sector of astronautical constructions.

We could use also the following two complementary roots: "sta" (as in "stationary") and "ve" (as in "vector") and, thus, obtain:

"sidarsta" = stationary sidar

"sidarve" = sidar-vehicle.

The above words, however, do not present much advantage (from the point of view of brevity) in comparison with "sidar-station" or "sidar-ship".

A considerable convenience would be represented by such terms of abbreviated character as: gravi-force, gravi-field, fuga-force, comple-force, or comple-field that could be used to indicate the force and field of gravity, centrifugal force, and complementary forces which are met with frequently in sidar-mechanics.

It would be premature to attempt to venture into further details of such a nomenclature. With reference to various planets, we could use the following abbreviations: "mer", "ven", "ter", "mar", "jup", "sat", "ura", "nept", and "plu", but such compounds as "sidarstater" or "sidarve termar" are questionable and it will, therefore, be necessary to wait until the actual needs and opinions have been formed.

3. Problems of Sidar-Mechanics

As a matter of fact, the problems which are studied here concern principally artificial satellites, and using the complementary roots of our nomenclature, we should, strictly speaking, refer to "sidarsta-mechanics". Nevertheless, as it is also possible to extend the above-mentioned problems to bodies that move from one orbit to another, it has been decided to retain the title of the present paragraph.

Generally speaking, sidar-mechanics can be divided (in view of a certain analogy with ballistics) into "external", "internal", and "correlative", as specified subsequently¹.

¹ The words "external" and "internal" both contain "tern" which has been, presumably, derived from "tern(ary)"; we could, therefore, coin a third word "transternal" ("fraternal" has a different meaning).

This third sector would find its analogy in setting and sighting in ballistics.

"*External sidar-mechanics*" are concerned with the movement of a sidar, considered in its ensemble. This science studies the gravitational field in which a sidar moves and its dynamic equilibrium resulting from the action of the forces of inertia, and eventual starting or braking impulses.

Essentially, it is an application of celestial mechanics (with some additions) to a particular sector of problems in which the mass of the moving body is negligible in comparison with that of the bodies which determine the field in which it moves. In other words, the reaction aroused in them by the moving body is negligible, in spite of the close proximity of its trajectory. Both centric movement and the movements around the centre are considered.

Various systems of variable reference coordinates of the movement can be used: helio-centric, geo-centric, or topo-centric. This applies to revolving movement; as regards the rotation around the centre, its origin can be set in the sidar itself, while its orientation can be established with reference to fixed stars, or axis rotating together with the earth or diversely.

"*Internal sidar-mechanics*" studies, instead, the movement of bodies situated in the interior of the sidar or linked with it in its immediate proximity. The system of reference coordinates is generally hinged, in such cases, to one of such bodies.

In the interior of the sidar, and as regards the movement of revolution only, we shall find the gradient of a field that originates from a progressive local lack of equilibrium between the gravitational and centrifugal fields. If, instead, the sidar is animated by a rotary movement of its own, the internal inertial forces are enhanced.

A knowledge of the internal field of mass forces is necessary in order to determine the operation of the mechanical and electro-mechanical instruments present aboard the sidar. This field is also important because it constitutes one of the features of the internal conditions of the sidar, closely linked with the physiological environment it provides for the life of men, animals, or plants.

The knowledge of the field of forces is of primary importance for the construction of sidars, because such forces determine the shape and the thickness of stress-bearing parts as well as their supply and spacial assembling.

"*Correlative sidar-mechanics*", constituting a link between the two above branches, concern the effects that are produced upon revolution and rotary movements (as well as upon the internal) by controlling impulses effected, either automatically, or by means of instruments aboard the sidar, or by impulses transmitted from the earth or other sidar-stations. Such controlling impulses may be sporadic or persistent in time, and they may be local or distributed regularly through the space. This branch of sidar-mechanics also concerns the principles which should guide technical application in sidar-navigation.

Several articles covering subjects that may be considered pertaining to sidar-mechanics (especially the "external") have been published in such technical periodicals as the Journal of the British Interplanetary Society or the Journal of the American Rocket Society. Indeed, during the past four or five years, there have been published over a dozen studies by D. F. LAWDEN, H. PRESTON-THOMAS, S. HERRICK, L. SPITZER, Jr., H. S. TSIEN, G. F. FORBES, K. W. GATLAND, A. C. CLARKE, D. J. CASHMORE, and others.

Although the problems of internal sidar-mechanics (in the sense outlined above) have, so far, been only hinted at, a partial reference to them will be found in the field of gyroscopes to the various applications of which many studies have been devoted (R. GRAMMEL). The elements which concern methods of navigation

have been studied by D. J. CASHMORE [1], C. F. FORBES [2], and J. G. PORTER [3].

Similarly, as regards the correlative sidar-mechanics, the material is scanty; studies in this sector, however, can profit by the results obtained in other fields, such as servo-mechanisms or the so-called "cybernetics".

Secondary effects disturbing the motion of artificial satellites have been studied by L. SPITZER, Jr. [4].

A special sector is constituted by the problems of stability which may crop up in any of the three parts into which sidar-mechanics have been divided. As far as we are aware, there have been no special articles on this subject, except for the recently published study by J. LOGIE [5] which concerns the effect of the tidal friction upon the motion of satellites; the results of this study are still being discussed.

II. Unification of Orbits

A Premise. We are beginning with the study of this problem (an application rather than a base of sidar-mechanics), owing to its importance and the opportunity it gives us to recall some simple formulas covering KEPLERIAN movements and to consider those of their aspects that concern sidar-stations.

1. Factors in Favour of the Unification

The simple specific factors which we are listing below, beginning with the ones that are most easily acceptable, will be reviewed on the subsequent pages.

Simplicity of the manner in which the orbit and the phase angle of the sidar in respect to it (i. e. its direction) could be ascertained.

Distribution of orbits and phases with sufficient intervals, in such a manner as to guarantee an unhampered traffic of sidar-ships (specially in the not too distant atomic era).

Accurate fixing of the margins of error in positions to ensure the safety of circulation and to permit ascertainment of liabilities.

Facilitation of control and preservation of equilibrium in the system.

Presentation of data for an agreement ensuring a fair distribution of space that would moderate the natural requirements of the parties concerned, basing solutions on legal premises and not on contrasts among forces. This factor, however, has to be studied elsewhere and it has been mentioned here only incidentally.

We shall limit ourselves to the above factors which present obvious analogies with the distribution of wave-lengths of the radio (for civilian and military communications, broadcasts, scientific and amateur transmissions), town-planning, international conventions regarding airlines and sea and land routes, and standard definitions in science and industry which are particularly useful in mass production.

2. Study of the Factors

a) *Simplicity of locating the orbit and phase.* It would be obviously convenient to adopt a direction that would depend on simple constant parameters which are easy to indicate and which would involve simple and speedy calculations when a sidar has to be traced.

The above conception and the problems involved seem to indicate the advisability of correlating the parameters with the natural scale of whole numbers. We shall subsequently suggest some indications.

Vol.
1
1955

b) *Sufficient intervals.* The setting of as large a reciprocal distance as permitted by the situation would create a maximum operation space around sidar-stations, and would leave a wider strip of space for the circulation of sidar-ships. Less sensitive and accurate sighting and navigation instruments will be required and, when required, it will be possible to increase speeds with less danger.

c) *Margins of errors in the position admitted.* The above margins refer both to the sidar-station and to the auxiliary units which depend from it. Preoccupation for its safety and for the safety of the others make it imperative not to abandon the traffic area of a sidar-station unless (to draw a parallel) a special semaphore is provided to indicate that the route is free.

d) *The stability of the system.* One or more observation stations, linked with a central, will be assigned to watch over the situation of the orbits and phases. The ascertainment of perturbations and of their causes will be easier if the structure of the system obeys the rules of symmetry. It will be also easier to bring the forces in play back to the planned balanced conditions.

3. Sources for a Rational Unification

In order to get a solution, a detailed analysis should be performed from many viewpoints. A brief discussion will be carried out for the following items:

Direction of travel in the orbits; energy levels; moment of momentum; times of revolution.

4. Direction of Travel on the Orbits

There seems to be no reason that the motion of revolution of the sidar-stations should take place in one direction for some of them, and in the opposite direction for the others: without giving further details, it seems to be better that all of them have the same direction, i. e., the one called "direct" by the astronomers (counterclockwise with respect to any observer lying on the axis of the earth in the South-North direction); this is suggested to provide agreement with the direction of the motion of the moon with respect to the earth.

Some exceptions may be admitted: By referring, e.g., to the solar system, it is known that the five satellites of Uranus and the two satellites of Neptune are all retrograde, whereas Saturn and Jupiter have some retrograde satellites, although only among the most peripheral of them.

5. Energy Levels of the Orbits

We might limit ourselves to consider the motion of the center of gravity, G , of the sidar, whose mass is m .

Let M_T denote the mass of the earth, and f , GAUSS' universal constant of gravity:

$$f \cong 6.664 \times 10^{-11}, \quad \text{M.K.S. units.} \quad (1)$$

Let

$$k_T = f M_T, \quad [L^3 T^{-2}] \quad (2)$$

be the gravi-force that a mass M_T would exert on the unit mass (acceleration, or field-intensity) located at the unit distance from it.

Some idea on the value of k_T can be given, considering that by denoting by R_m the mean radius of the earth surface, the gravi-acceleration on such surface will be R_m^{-2} times smaller than k_T , so that, by denoting by g_m an appropriate mean value of such acceleration (without the centrifugal correction), it will be:

$$k_T = g_m R_m^{-2} \quad (3)$$

Let the motion of G be referred to a system of coordinate axes T_{ge} (geo-centric), with the origin at the c. g. G_T of the earth, and of constant orientation with respect to the fixed stars.

We will make the following assumptions, all of which are approximate:

The acting forces are reduced to those of gravity towards the earth, of resultant \vec{A}_{Te} , and to the forces of inertia (motive impulses, and friction forces, are assumed to be missing; other gravity forces with respect to those of the earth are considered negligible).

The gravi-field is uniform all over S ($S = \text{sidar}$). Thus the work of \vec{A}_{Te} when applied to G for a displacement of G starting from the initial position G_0 , will not depend on the shape and orientation of S in the field and will be equal to the difference of the values of the gravi-potential in G and G_0 .

The mass distribution of the earth consists of spherical homogeneous layers, all having the center in the c. g. G_T of the earth, so that the potential in G will only depend on the distance r from G to G_T .

The tow and CORIOLIS' forces at G are negligible: such forces are due to the fact the T_{ge} is not an inertial triad (the motion of T_{ge} is translational, but is not rectilinear and uniform, on account of the revolution of the earth around the sun).

The mass m of S is very small in comparison to that of the earth, M_T , in such a way that it is possible to substitute the correction coefficient: $\mu = 1 + m/M_T$ by unity (such correction coefficient is that by which k_T should be multiplied, in order to take into account the fact that the motion of G being considered is not the absolute one, but that relative to T_{ge}).

The above assumptions are pointed out, since the consideration that the secondary effects are neglected is one of the objects of the sidar-mechanics, when better accuracy is required.

The kinetic energy per unit mass in the motion of G , with speed v_G , is:

$$T_{1,G} = v_G^2/2. \quad (4)$$

Under the above assumptions the specific potential energy (i. e., the potential energy per unit mass) has the simple expression:

$$\Pi_{1,G} = -k_T/r. \quad (5)$$

Referring to the motion of G , the theorem on the integral of energy can be applied:

$$T_{1,G} + \Pi_{1,G} = E_1, \quad (6)$$

where E_1 is a constant, in particular equal to the value that the left side of Eq. (6) has at G_0 :

$$E_1 = v_{G,0}^2/2 - k_T/r_0. \quad (7)$$

The trajectory of G can be, in particular, a circle. In this case, by equating the force of gravitation to the centrifugal force, one gets the condition

$$v_G^2 = k_T/r, \quad (8)$$

which shows, in this case that:

$$\Pi_{1,G} = -2 T_{1,G}, \quad (9)$$

i. e., the potential energy is — in absolute value — two times the kinetic energy, so that:

$$E_1 = -k_T/2r = \Pi_{1,G}/2 = -T_{1,G} \quad (10)$$

(Ancient people gave to $2 T_{1,G}$ the name of "forza viva" [6]).

It is of interest to determine the expression of E_1 in the more general case (the trajectory of G is an ellipse). For this purpose, we recall some well-known formulas on the KEPLERIAN motions, which will be made use of hereinafter.

Let us refer to the property of the central motions that the areal velocity is constant. By denoting by φ the angle between \vec{v}_G and $G_T G$ one has:

$$v_G r \sin \varphi = c, \quad (11)$$

where c is the areal velocity constant.

By applying such formula at the perigee and apogee, where $\varphi = 90^\circ$, and by subscripts p and a for the two cases, one has:

$$v_a r_a = v_p r_p = c. \quad (12)$$

By denoting by a and b the semi-axes of the ellipse, by e the eccentricity, by \dot{p} the parameter:

$$\dot{p} = b^2/a = a(1 - e^2), \quad (13)$$

Eq. (12) yields:

$$v_p/v_a = (1 + e)/(1 - e), \quad (14)$$

i. e.,

$$v_p = v_m (1 + e) \quad (15)$$

$$v_a = v_m (1 - e), \quad (16)$$

where

$$v_m = (v_p + v_a)/2 = c(1/r_p + 1/r_a)/2 = c/\dot{p}. \quad (17)$$

By equaling the expression of the total energy at the perigee and apogee:

$$v_m^2(1 + e)^2/2 - k_T/a(1 - e) = v_m^2(1 - e)^2/2 - k_T/a(1 + e), \quad (18)$$

one gets:

$$c^2 = k_T \dot{p}, \quad (19)$$

and it is also:

$$v_m = (k_T/\dot{p})^{1/2}, \quad (20)$$

that provides the following expression of E_1 , as a common value of both sides of Eq. (18):

$$E_1 = -k_T/2a. \quad (21)$$

By substituting such expression into Eq. (7), the well-known expression of v_G in terms of r is obtained:

$$v_G^2 = k_T(2/r - 1/a). \quad (22)$$

(This can be stated, according to H. BOUASSE, in "Mécanique rationnelle", as follows: the velocity is the same as that of a material point, reaching the point being considered, starting with zero velocity from any point of a circle of radius $2a$, having the center in the focus of the ellipse.)

For $r = a = \text{const.}$, one comes back to Eq. (8). Eq. (21) shows that: $E_1 < 0$ for the ellipse, and that its increment is positive when a is increasing ($E_1 = 0$, parabola: $E_1 > 0$, hyperbola).

The time of revolution is given by:

$$T = 2\pi a b/c, \quad (23)$$

i. e., by (19) one has, as it is known from KEPLER's 3rd law:

$$T = k_* a^{3/2}, \quad (24)$$

where

$$k_* = 2\pi/\sqrt{k_T}. \quad (25)$$

A criterion of unification for the orbits of sidar-stations, based on assuming the energy levels E_1 in a proportional correspondence to the series of integer numbers (N be the generic one), would provide:

$$E_{1,N} = E_{1,0} + N(E_{1,\bar{N}} - E_{1,0})/\bar{N}, \quad (26)$$

where $E_{1,0}$ is the specific total energy for the most internal orbit being established (for $N = 0$), $E_{1,\bar{N}}$ refers to the most external orbit, corresponding to a maximum value of N , \bar{N} .

Through (21) one has for the semi-axes:

$$a_N = a_0 / (1 - k_1 N) \quad (27)$$

where

$$k_1 = (1 - a_0/a_{\bar{N}})/\bar{N}. \quad (28)$$

Then, by substituting the expression (27) of a_N into Eq. (24), one has:

$$T_N = T_0 / (1 - k_1 N)^{3/2}. \quad (29)$$

This relationship shows that the times of revolution corresponding to the N 's of the various orbits are not in simple ratios one with another. Such a solution therefore does not seem to be appropriate, also if considering the difficulty of measuring the energy levels, if indirect methods are not applied (relative to a or T).

6. Moment of Momentum

For sake of simplicity, let us refer to the case of circular orbits.

By remembering Eq. (8), the moment of momentum per unit mass is:

$$p_1 = r v = (k_T r)^{1/2}. \quad (30)$$

A correspondence of p_1 with the series of integer numbers can be established in the simplest way, by letting:

$$p_{1,N} = N p_*, \quad (31)$$

where p_* refers to the orbit $N = 1$, given by an appropriate convention.

Condition Eq. (31) is analogous to BOHR-SOMMERFELD's rules of quantization for hydrogenoid spectra. Thus although the system of orbits would have some similarity with that of the electronic orbits of hydrogen, the scale ratio of the macroscopic construction would not have a necessary relationship with the atomic constants, or such as is to be expressed by an integer number, which would be too great for any measurement short of ideal accuracy.

This will not prevent — from an ideal viewpoint — an organic connection between the characteristics of the universe, as considered at the cosmic and at the atomic scale, as it has been developed by LETTERIO LABOCETTA [7, 8, 9]. This has recourse to MAXWELL's normal sphere, and follows the cosmologic theory of A. S. EDDINGTON ("The Expanding Universe") and SCHRÖDINGER's and F. L. ARNOT's ideas (the cosmic constant would be equal to the ratio of the radius of the universe to that of the electron, and this would be the geometrical mean value between the first and the radius of the elementary atom).

Eq. (31), by means of Eq. (30) yields:

$$r_N = N^2 p_*^2 / k_T, \quad (32)$$

while the total energy would be

$$E_{1,N} = -k_T^2/2 p_*^2 N^2, \quad (33)$$

and the time of revolution:

$$T_N = 2\pi p_*^3 N^3 / k_T^2. \quad (34)$$

The ratio between the times of two orbits would not be a simple fraction with low values of the numerator and of the denominator (N^3 increases rapidly with N). On the other hand, the moment of momentum could be controlled only by indirect measurements.

Vol
1
195

7. Time of Revolution

One might establish a proportionality law between T_N and N , that would lead to simple fractions for the ratios between the times of two orbits, but in such a distribution the radii would increase too smoothly, as $N^{2/3}$. Such a ratio does not seem to be convenient nor practical. On the contrary, it seems to be preferable to keep the relative value constant of the interval between two consecutive orbits, i. e., the ratio of the difference of the two radii to the value of one of them; or by denoting by $A - 1$ as an appropriate constant:

$$(r_{N+1} - r_N)/r_N = A - 1, \quad (35)$$

i. e.,

$$r_{N+1} = A r_N. \quad (36)$$

Hence one gets, by a recurring method:

$$r_N/r_0 = A^N, \quad (37)$$

where r_0 is a conventional reference radius. One has consequently:

$$T_N/T_0 = B^N, \quad (38)$$

where B is related to A by:

$$A = B^{2/3}. \quad (39)$$

A surprising circumstance is that G. ARMELELLINI [10] has indicated a law of the type of Eq. (37) for the semimajor axes of the orbits of the planets of the solar system, giving to A the value

$$A_{Arm} = 1.53.$$

The formula suggested by G. ARMELELLINI can be classified closely to an ancient one (1778) of J. TIETZ, generally called BODE's law:

$$a_N = 0.4 + 0.3 \times 2^N. \quad (40)$$

As a consequence of the above discussion, referring to Eq. (38), we suggest, for the case of the solar system, the very simple: $B = 2$, which leads to the value:

$$A = \sqrt[3]{4} = 1.5874. \quad (41)$$

Shown in the following comparative table are the results obtained for the values of the said semi-axes, by letting $a = 1$ for the earth, and subscripts V , T , A , B , respectively refer to the real values and those obtained by the formulas of BODE, ARMELELLINI, and the one being suggested here ($B = 2$). There are also indicated the values of N that have been taken in the three formulas, for the various planets:

Planet	a_V	a_T	a_A	a_B	N_T	N_A	N_B
Mer	0.39	0.40	0.43	0.40	$-\infty$	2	2
Ven	0.72	0.70	0.65	0.63	0	1	1
Ter	1.00	1.00	1.00	1.00	1	0	0
Mars	1.52	1.60	1.53	1.59	2	1	1
Jup	5.20	5.20	5.48	6.35	4	4	4
Sat	9.54	10.00	8.38	10.08	5	5	5
Ura	19.2	19.6	19.6	16.0	6	7	6
Nep	30.1	38.8	30.0	25.4	7	8	7
Plu	39.5	77.2	45.9	40.3	8	9	8

This table shows that BODE's formula requires an infinite number of missing places between Mercury and Venus, and this cannot be justified. Such does not happen for the two other formulas. The asteroids strip is counted for one

place in the first formula, and for two places in the other two formulas. ARMELLINI's formula requires a missing place between Saturn and Uranus, for which no explanation is given. BODE's formula also provides for an inaccurate value for a in the case of Pluto.

The third formula appears to be the most natural one; firstly, for a physical meaning attributable to $B = 2$, as it will be shown, and secondly, because minor objections can be addressed to it with respect to the to-be-adopted value of N . In fact, the average quadratic error of the relative values of a_N is of the order of 11% in the case $B = 2$, whereas ARMELLINI's formula provides a value not too much smaller for such an error (exactly 8%). However, the disadvantage is balanced by a more accurate agreement in the axes of the outermost and of the innermost planet:

$$\begin{array}{cccc} V & T & A & B \\ a_{Plu}/a_{Mer} = 101.3; & 193; & 106.7; & 100.8. \end{array}$$

Of course, the values of T_N depend on those of a_N , according to Eq. (24). In the following table comparison is made between the true values and those for $B = 2$, also indicating the percent error, A , with respect to the latter. It has been set $T = 1$ for Mercury.

	Mer	Ven	Ter	Mar	Jup	Sat	Ura	Nep	Plu
$A\%$	0	28	4	-2	-23	-5	36	34	1
V	1.00	2.55	4.15	7.81	49.3	122	349	684	1030
B	1	2	4	8	64	128	256	512	1024

The regularity of the geometric series of ratio $B = 2$ has a surprising reference to the actual values.

Another example can be given for the satellites of Jupiter:

Satellite	T	T'	T''
(Barnard)	0.2814		
Io	1.0000		
Europa	2.0068		
Ganymede	4.0433		
Callisto	9.1953	1.00	
P	146.1	15.89	1.00
N (retr.)	410.1	44.59	2.81

P and N denote two strips, each consisting of three satellites, with values of T being only slightly different one from another; more exactly: 141.7 — 147.0 — 149.7 — 391.6 — 417.6 — 421.0. The two respective mean values have been considered. In the columns T , T' , T'' , the value 1.00 has been taken for the satellites Io, Callisto, and for those of the strip P , respectively. Some place appears to be missing in the series being shown.

It is noted that motion of the satellites of the strip N has clockwise direction. Taking into account this fact, one should consider, instead of $T' = 2.81$, the value

$$T'' = 2.81 + 1 \cong 4.$$

Denoting by f_1, f_2, f_3 the reciprocals of T for the satellites Io, Europa, Ganymede, respectively, one has:

$$f_1 = 1.0000; \quad f_2 = 0.4983; \quad f_3 = 0.2473.$$

Such values are proportional to the so-called mean motions (angular velocities). One can write the noticeable relationship:

$$f_1 - 2f_2 \cong f_2 - 2f_3. \quad (42)$$

equivalent to:

$$f_1 - 3f_2 + 2f_3 = -0.0003 \cong 0. \quad (43)$$

Eq. (43) is known as the theorem of LAPLACE, who showed the reasons for it when studying the effects on the disturbances of the motion of such satellites. LAPLACE has also shown other relationships of commensurability, e. g., for longitudes, that occur in reality with extreme accuracy. ARMELLINI indicates [10], that the question of the ratios between physical quantities of the solar system has also been recently examined by VOCCA¹ [11, 12] and CARLOMUSTO.

8. An Example of a Sidar-Orbit System

The preceding analysis shows the convenience of following a system based on times of revolution.

The physical factors which have led to the adoption of the basic value $B = 2$ must be sought in the considerations covering three consecutive orbits. In this system the intermediary orbit, which has a radius equal to the geometrical mean between the values representing the radii of the other two, receives synchronized impulses from the neighbouring orbits at various frequencies. This frequency amounts to one half of that of the intermediate orbit in the case of one orbit, and is double of the frequency of the intermediate orbit in the case of the other.

The effects which result from these impulses can be worked out along the methods used for perturbations in the celestial mechanics. It is a well known fact that a regulation may or may not take place, in accordance with the size of such forces. In fact, if we consider two geometrically similar systems with equal mass density, the forces of gravity will diminish with the diminution of dimensions in accordance with the geometrical ratio of similitude. In other words, we must expect that the forces sidars exercise upon one another will be very small; at the same time, we cannot exclude the possibility that in view of their frequent rhythm, the synchronized effects may sum themselves into considerable quantities.

In any case, we shall have to consider the attraction exercised by the moon, especially in the cases of the sidars with the most external orbits. It will be convenient to adopt as fundamental frequency the one that is involved in the time of the revolution of the moon (sidereal revolution) taking into the account the corrections due to the shifting of apsides and line of the nodes, and reducing the times of revolution of the sidar orbit within the 2^N ratio. In actual practice, in making terrestrial observations intended for the control of the passages of sidars it will be convenient to use clocks graduated for moon time.

Fig. 1 shows a schema of a model system of sidar orbits based on such principles. Although the orbits are more numerous in the proximity of the surface of the earth, it may become necessary to increase their number further. It will be necessary then to abandon the $B = 2$ ratio and, for instance, starting from the orbit $N = 2$, to reduce the time of revolution in accordance with the ratios of $2/3, 3/4, 4/5, 5/6$, etc. . . as we have seen in the case of the orbits indicated in Fig. 1. There remains, therefore, a simple commensurability. Note, furthermore, that we shall get: $1/2 \times 2/3 = 1/3$; $1/2 \times 2/3 \times 3/4 = 1/4$. . .

It is understood that a particular level may also be occupied by more than one sidar-station (Reference is made to the preceding paragraph concerning the

¹ Successively to the data of presentation of this paper a list of the works of the astronomer P. VOCCA was received by courtesy of his son, Ing. SIRIO VOCCA, and the citations [11, 12] are drawn from that list.

satellites of Jupiter, strips N and P); but this solution must be avoided, unless the sidars are substations depending from a principal one. The phases of the sidars will have to be regulated by conventions.

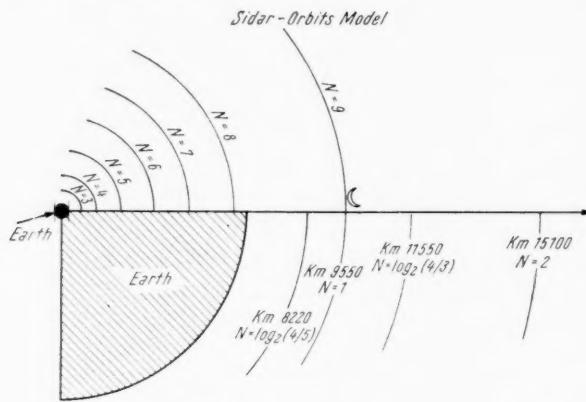


Fig. 1.

Other rules may be devised concerning the line of nodes which it would be better to have coinciding with the lunar line.

Fig. 2 shows that the planes of the orbits may rotate around the lines of the nodes.

The inclination of the orbit in respect to the ecliptic will be regulated by conventions in order to leave certain areas for crossing; generally the inclination should be near to that of the lunar orbit, which is $5^{\circ} 8' 30''$.

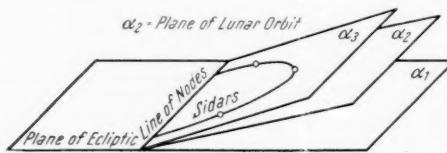


Fig. 2.

We note here that the problem of traffic concerns the space-time factor; it is only if the trajectories are determined that the problem is reduced to two variables (graphical time-tables).

III. Examples of Internal Sidar-Mechanics

The system T_S of reference coordinates will be generally of sidar-centric type, i. e. with origin Ω solid with Sidar S .

Note that the shifting of masses in the interior of S provokes generally a corresponding shifting in the centre of gravity, G . For this reason, when it is assumed (as it will often be convenient) that $G \equiv \Omega$, the reference coordinate system T_G will be linked with S only with a certain approximation, which is not always sufficient.

At the same time, if we do not have Ω coincide with G , the dynamic study of S will often require the knowledge of the movement of Ω , which is, after all, another of the unknown quantities in the problem under consideration.

Let us take P for a material point of the mass m to which force \vec{F}_P is applied (to effect a programme); in such a case we could have:

$$\begin{aligned}\vec{H}_P &= \text{intensity of the gravitational field at } P, \\ \vec{a}_P^{(a)} &= \text{absolute acceleration of } P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(r)} &= \text{acceleration of } P \text{ with relation to } T_S, \\ \vec{a}_P^{(t)} &= \text{tow acceleration at } P, \\ \vec{a}_P^{(c)} &= \text{complementary acceleration at } P, \\ \vec{a}_P^{(r)} &= \vec{F}_P/m + \vec{H}_P - \vec{a}_P^{(t)} - \vec{a}_P^{(c)}.\end{aligned}\quad (44)$$

If we indicate the angular speed of T_S in respect to fixed stars with $\vec{\omega}_S$, we shall have:

$$\vec{a}_P^{(t)} = \vec{a}_\Omega^{(a)} - \omega_S^2 \cdot P_* P + \vec{\omega}_S \wedge \vec{\Omega} P, \quad (45)$$

in which P_* is the orthogonal projection of P onto an axis which is parallel to $\vec{\omega}_S$ and passes through $\vec{\Omega}$.

We shall now note gravi-sidar acceleration thus:

$$\vec{g}_{S,P} = \vec{H}_P - \vec{a}_P^{(t)}. \quad (46)$$

Replacing in Eq. (44) we shall have:

$$\vec{a}_P^{(r)} = \vec{F}_P/m + \vec{g}_{S,P} - \vec{a}_P^{(c)}. \quad (47)$$

It is obvious that $\vec{g}_{S,P}$ has, in respect to T_S , the same functions that the noted gravity acceleration has (which we shall indicate as $\vec{g}_{T,P}$ in respect to the axes linked with the earth).

This gives us:

$$\vec{g}_{S,P} = \vec{H}_P - \vec{a}_\Omega^{(a)} - \omega_S^2 P P_* - \vec{\omega}_S \wedge \vec{\Omega} P. \quad (48)$$

If $P \equiv \vec{\Omega}$, we shall have:

$$\vec{g}_{S,\Omega} = \vec{H}_\Omega - \vec{a}_\Omega^{(a)}. \quad (49)$$

If furthermore $\vec{\Omega} \equiv G$ (and $\vec{F}_G = 0$):

$$\vec{g}_{S,G} = \vec{H}_G - \vec{a}_G^{(a)} = 0, \quad (50)$$

and Eq. (48) becomes:

$$\vec{g}_{S,P} = \vec{H}_P - \vec{H}_G - \omega_S^2 \cdot P P_* - \vec{\omega}_S \wedge G P. \quad (50a)$$

Let us indicate with \vec{u} the versor¹ of $P G_T$ (G_T = centre of the earth), nearly constant in the whole S :

we then have:

$$\vec{H}_P = k_T \vec{u} / r_P^2. \quad (51)$$

Differentiating only in respect to r ($\vec{u} = \text{const.}$) we have:

$$d\vec{H}_P = -2k_T \vec{u} (dr) / r^3 = -2\vec{H}_P (dr) / r \quad (52)$$

which gives us, with certain approximation:

$$\vec{H}_P - \vec{H}_G = -2\vec{H}_G \cdot (\Delta r) / r, \quad (53)$$

in which:

$$\Delta r = r_P - r_G. \quad (54)$$

Eq. (53) alone gives us $\vec{g}_{S,P}$ if $\vec{\omega}_S = 0$ and $\vec{\omega}_G = 0$, and we see that the direction depends on the sign of Δr . To be precise, we could say that we have an anti-gravity² in respect to the plane passing through G and perpendicular to the radius of the orbit.

Fig. 3 illustrates in a vivid manner the fact that a liquid contained in a receptacle would be divided into two parts gravitating in opposite directions.

^{1, 2} Cf. remarks 1, resp. 2, p. 136.

For greater precision, differentiating \vec{H}_P , in the Eq. (51), also in respect to \vec{u} the differential field, $\Delta \vec{H} = \vec{H}_P - \vec{H}_G$, is formed of two components, $H_{S,X}$ and $H_{S,Z}$, respectively along two orthogonal axes, X and Z , with origin in G , and X in the direction from G_T to G . Indicating by Z and $X = \Delta r$ the coordinates of P , one has:

$$H_{S,X} = 2 H_G X/r, \quad H_{S,Z} = -H_G Z/r,$$

i. e., antigravity along X and gravity along Z . The equipotential lines have the equation of the hyperbolas:

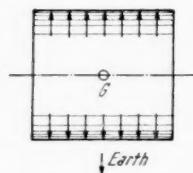


Fig. 3.

$$X^2 - 2Z^2 = \pm (\text{const.})^2, \quad (54 \text{ a})$$

and the lines of force have the equation of the (cubic) hyperbolas:

$$XZ^2 = \pm (\text{const.})^2, \quad (54 \text{ b})$$

with the asymptotes in the direction of the X and Z axes.

If $\vec{\omega}_S$ and $\vec{\omega}_S$ are not equal to zero, the configuration of the field changes.

If S turns invariably the same side to the earth, i. e.:

$$\vec{\omega}_S = 2\pi \vec{n}_S/T_S, \quad (55)$$

in which \vec{n}_S is the normal in respect to the plane of the orbit and T_S is the time of revolution and if we consider in particular a point Q which remains constantly on the plane $G_T G$ and \vec{n}_S , we have:

$$QQ_* = \vec{u} \Delta r \quad (56)$$

and when $\vec{\omega} \wedge G P$ is negligible (as for a circular orbit), Eq. (50 a) becomes:

$$\vec{g}_{S,Q} = -(2H_G \Delta r/r + \omega_S^2 \Delta r) \vec{u} \cong -3H_G (\Delta r/r) \vec{u}. \quad (57)$$



Fig. 4.

The direction of $\vec{g}_{S,Q}$ remains invariably that of the radius of the orbit, but its versus depends on the sign of Δr .

We could imagine (Fig. 4) a bi-versus plumb-line suspended from G . Eventual physical apparatus intending to indicate constantly the direction of $G G_T$ should be derived from this.

Another example is the following. A given material point P initially linked to S is left free (Fig. 5).

Let us suppose that S turns invariably the same face towards the earth, and that the orbit of G is a circle.

In the beginning the speed of P is:

$$v_P = v_G(1 + \Delta r/r_G). \quad (58)$$

By means of Eq. (22) we shall obtain the major axis of the ellipse described by P :

$$1/a_P \cong 2/(r_G + \Delta r) - v_G^2(1 + 2\Delta r)/k_T, \quad (59)$$

or, by means of (8):

$$a_P \cong r_G + 4\Delta r. \quad (60)$$

The time of revolution for P is:

$$T_P \cong T_G(1 + 6\Delta r/r). \quad (61)$$

This, after one revolution, makes P recede by:

$$\Delta l \cong v_G(T_P - T_G) \cong 12\pi\Delta r, \quad (62)$$

depending only on geometrical factors.

Generally, denoting by h a numerical factor, if $v_P = v_G(1 + h \Delta r/r_G)$ and $r_P = r_G + \Delta r$, the circumferential removal is given by: $\Delta l = 6\pi(1 + h) \Delta r$, and $\Delta l = 0$ only if $h = -1$, while for $h = 0$, the value of Δl is half of that indicated in Eq. (62).

This fact, like many other similar ones, must be taken into account when setting conditions for the assembly of the various parts of the Sidar and to prevent dispersal of objects which may become a danger to the traffic.

IV. Indications Concerning Gravitational Fields

It is of particular interest to know the gravitational field of the earth, which is considered as having the shape of a revolution ellipsoid. There are many studies on this subject and the history of them is given by TODHUNTER [13].

In the case of a homogenous ellipsoid the potential can be calculated by means of elliptic functions or by means of JACOBI's Θ functions. IVORY's and GAUSS's theorems supply useful indications in this connection.

As regards a non-homogenous ellipsoid, F. TISSERAND [14] gives a clear exposition of a method of calculation of the potential V at an external point, utilizing LAPLACE's method, spherical functions and LEGENDRE's polynomials.

In the case of a revolution ellipsoid, the formulae become simplified. This is also because the calculation of V for a point outside the axis can be reduced to that covering the points of the axis; for the first two terms of a series we shall have (TISSERAND [14], p. 323):

$$V_P = M_T/r + k(1 - 3 \cos^2 \Theta)/r^3, \quad (63)$$

in which Θ is the angle which the axis forms with the straight line $G_T P$, while k is a constant depending on the distribution of the density of the mass of the ellipsoid.

Eq. (63) is, in substance, the formula that was used by L. SPITZER, Jr. ([4], see p. 134) for the calculation of perturbations due to the oblateness of the earth, unless the constant k is specified in a different manner.

We are giving an indication which may show the way in which V is distributed.

Limiting ourselves to considering the expression (63) as being in an axial plane, we shall see that the distribution of V is the same as the distribution that would be provided by two masses arranged along the major axis of the ellipse and on both sides of its centre. In the case when it is desired to consider all the axial planes the distribution will be the same as in the case of a circular spire with a distributed mass. It is also possible to consider in this case three masses, a positive one in the center of the ellipsoid and two negative masses (corresponding to the oblateness) arranged along the minor axis (rotational) and on both sides of the center. Another system is to consider two axial dipoles (consecutive and of opposite direction).

It should be noted that in our branch of science problems are still very numerous and much study and research will have to be carried out before we secure a sufficient knowledge of all the phenomena involved.

Acknowledgement

The author wishes to express his gratitude to Prof. A. EULA, Secretary of the "Associazione Italiana Razzi" (A.I.R.), for the promotion of this study.

Remarks

¹ The (geometrical motion) along a line may be from *A* (and through *C*) towards *B* or the opposite, and an arrow is used to distinguish; we call this property the "versus", from the latin preposition "versus", french "vers" (substantive "sens"), english "(to)wards", german "(vor)wärts". Two parallel straight lines are said to have the same "direction", but, with the preceding distinction, the "orientation" (of a line or of a vector) = (direction) + (versus). We could coin the new word "orientator of \vec{v} " (abbreviated "ori \vec{v} "), to indicate a unity vector having the same orientation of \vec{v} ; presently we have accepted the word "versor" (unity vector), which is already much used with the same meaning in italian textbooks on mechanics. So we write: $\vec{v} = (\text{magnitude of } \vec{v}) \cdot (\text{versor of } \vec{v}) = v \cdot \text{vers } \vec{v}$. The radix "vers", with the prefixes ad-, con-, in-, trans, ..., originates many words.

² Effectively this field is proportional to the displacement of *P* from *G* (instead that to the reciprocal of the square of the displacement), i. e. the law is like that for an elastic field, and the word "anti-gravity" is used essentially to call the attention (to the gravitational source), but properly the more general words "attractive and repulsive forces" should be used.

References

1. D. J. CASHMORE, Some Problems of Interplanetary Navigation. J. Brit. Interplan. Soc. **10**, 71 (1951).
2. G. F. FORBES, Application of the General Trajectory Equations. J. Brit. Interplan. Soc. **10**, 194 (1951).
3. J. G. PORTER, Navigation without Gravity. J. Brit. Interplan. Soc. **13**, 68 (1954).
4. L. SPITZER, Jr., Perturbations of a Satellite Orbit. J. Brit. Interplan. Soc. **9**, 131 (1950).
5. J. LOGIE, Effect of Tidal Friction on a Near Satellite. J. Brit. Interplan. Soc. **13**, 170 (1954).
6. P. S. LAPLACE, *Traité de mécanique céleste*. T. I, p. 52. Paris: An. VII.
7. L. LABOCETTA, La Curvatura dello Spazio e le Dimensioni Limiti degli Asteri. Ricerca Sci. **9**, 33 (1938).
8. L. LABOCETTA, La Relazione di EDDINGTON fra il Raggio dell'Elettrone e il Raggio dell'Universo. Ricerca Sci. **9**, 164 (1938).
9. L. LABOCETTA, Le Unità Cosmiche. Ricerca Sci. **9**, 468 (1938).
10. G. ARCELLINI, *Fondamenti Scientifici di Astronomia*, pp. 96–98. Milano: U. Hoepli, 1952.
11. P. VOCCA, L'Equilibrio del Sistema Solare e una sua Nuova Costante Dimensionale. Contributi Astron. Osserv. Capodimonte, Serie II, n° 20, 1941.
12. P. VOCCA, Nuove Leggi e Costanti Caratteristiche nell'Equilibrio del Sistema Solare. Contributi Astron. Osserv. Capodimonte, Serie II, vol. III, 1941.
13. J. TODHUNTER, *History of the Theories of Attraction and the Figure of the Earth*. London: MacMillan and Co., 1873.
14. F. TISSERAND, *Mécanique céleste*. Tome II: Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

 Vol
1
195

Vol.
1
1955

On the Descent of Winged Orbital Vehicles¹

By

Krafft A. Ehricke, Buffalo/N.Y.², ARS, IAS

(With 14 Figures)

(Received September 30th, 1954)

Abstract. The flight conditions during the descent of an orbital glider are discussed on the basis of a lift parameter, defined as ratio of lift coefficient to lifting area load. The flight conditions are evaluated essentially in terms of flow over a flat plate at zero angle of attack, although the effect of angles of attack has qualitatively been included in the discussion. The effect of the lift parameter has been studied with respect to velocity-altitude correlation, free stream REYNOLDS number, free stream MACH number, slip flow and continuum flow conditions, hypersonic shock wave-boundary layer interaction, stagnation temperature including dissociation, boundary layer conditions and heat transfer. The various means for dissipation of the glider energy are evaluated, and base drag, as well as drag due to lift, found to be most desirable. Minimization of the vehicle weight (through proper restriction of the missions and functions of the orbital glider) is desirable in order to keep the exposed area small for a given wing load. This permits operation at high angles of attack, for obtaining high lift coefficients, without the need for heat protection or cooling of very large surface areas.

Zusammenfassung. Die Flugbedingungen während der Rückkehr eines Satellitenflugzeuges in die Atmosphäre werden auf der Grundlage des Auftriebsparameters, definiert als Verhältnis von Auftriebsbeiwert zu Auftriebsflächenbelastung, behandelt. Die Auswertung erfolgt im wesentlichen auf der Basis der Strömung entlang einer flachen Platte ohne Anstellwinkel, obwohl der Einfluß von Anstellwinkeln qualitativ in die Diskussion einbezogen wurde. Der Einfluß des Auftriebsparameters wurde untersucht in Beziehung auf den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Flughöhe, REYNOLDS-Zahl und MACH-Zahl der ungestörten Strömung, Einfluß von Schlüpfströmung und Kontinuumströmung, Stoßwellen-Grenzschicht-Wechselwirkung im sehr hohen Überschall (Hyperschall), Stautemperatur einschließlich Dissoziation, Bedingungen in der Grenzschicht, und Wärmeübergang. Eine Auswertung der verschiedenen Methoden für die Dissipation der Energie des Gleiters ergab, daß Formsaugwiderstand und Auftriebwiderstand am vorteilhaftesten sind. Einhaltung eines möglichst niedrigen Gerätgewichtes (durch entsprechende Beschränkung des Flugauftrages und der Funktionen des Satellitenflugzeuges) ist wünschenswert, um die umströmte Fläche bei gegebener Flächenbelastung klein zu halten. Diese Maßnahmen erlauben die Anwendung hoher Anstellwinkel zur Erzeugung eines hohen Auftriebsbeiwertes, ohne große Flächen isolieren oder kühlen zu müssen.

¹ The results and conclusions presented in this paper are those of the author and not necessarily concurred in by the Bell Aircraft Corporation.

² New address: Design Specialist, Convair, San Diego/Calif., U.S.A.

Nomenclature

<i>a</i>	velocity of sound	W_{app}	apparent weight (variable due to the centrifugal effect)
C_L	lift coefficient	<i>x</i>	length (from leading edge)
c_f	local friction coefficient	<i>y</i>	altitude above the surface of the earth
\bar{c}_p	mean specific heat	γ	characteristic constant of a gravity field
<i>E</i>	energy	η	recovery factor
F_c	apparent centrifugal force	λ	mean free molecular path
<i>g</i>	acceleration due to gravity	μ	coefficient of viscosity
<i>H</i>	molar enthalpy	ϱ	density
I_{sp}	specific impulse	σ	density ratio
<i>J</i>	conversion factor from mechanical to thermal energy (778.3 ft-lb per Btu)	$Z = M_0^3 / \sqrt{Re_0}$	parameter for hypersonic shock wave-boundary layer interaction
<i>k</i>	heat conductivity		
<i>L</i>	lift		
$M = v/a$	MACH number		
(<i>MW</i>)	molecular weight		
<i>m</i>	mass		
$Pr = g c_p \mu / k$	PRANDTL number		
<i>p</i>	Pressure		
$Re = \varrho x v / \mu$	REYNOLDS number		
$r = r_{00} + y$	distance from the earth's center		
<i>S</i>	lifting area		
<i>T</i>	temperature		
T_i	insulated wall temperature		
T_{st}	isentropic stagnation temperature ($\equiv T_i$ for $\eta = 1$)		
<i>v</i>	velocity		
v_i	equivalent initial velocity [defined Eq. (4)]		
<i>W</i>	weight		

Subscripts

<i>A</i>	apogee
<i>c</i>	circular orbit (exception: F_c)
<i>i</i>	initial condition (exception: T_i)
<i>l</i>	laminar conditions
<i>P</i>	perigee
<i>t</i>	turbulent conditions
<i>w</i>	wall conditions
δ	conditions just outside the boundary layer
$_{00}$	surface (sea level) conditions
$_{\text{I}}$	conditions behind a plane shock wave
$_{\infty}$	free stream conditions
\oplus	referring to the earth

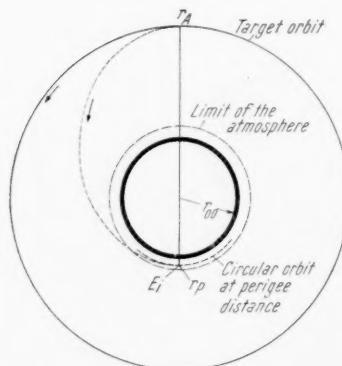


Fig. 1. Return of the orbital vehicle.

this energy between perigee altitude y_p and surface is given by

$$(E_{pot})_P = \frac{m}{2} \left(\frac{2\gamma}{r_{00}} \frac{y_p}{r_p} \right). \quad (1)$$

I. Introduction

A descending orbital vehicle carries an extremely large amount of mechanical energy when entering the atmosphere. This energy, shortly referred to as initial energy E_i , is equal to the sum of potential and kinetic energy at the perigee point of the return ellipse from the satellite orbit (Fig. 1).

The potential energy of the terrestrial gravity field between surface and infinity

is given by $E_{pot} = \frac{m}{2} \frac{2\gamma}{r_{00}}$ where r_{00} is the radius of the earth and γ is defined by Eq. (5) below. The relevant portion of this energy between perigee altitude y_p and surface is given by

The kinetic energy at the perigee point is proportional to the perigee velocity,

$$(E_k)_P = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2} (v_c)_P^2 \frac{2 r_A}{r_P + r_A} = \frac{m \gamma}{2} \frac{2 r_A}{r_P r_P + r_A} \quad (2)$$

where v_P is the perigee velocity in the elliptic path whose apsides are located at the distances $r_P = r_{00} + y_P$ and $r_A = r_{00} + y_A$, respectively; $(v_c)_P$ is the circular velocity at r_P .

The initial energy is thus given by

$$E_i = (E_k)_P + (E_{pot})_P = \frac{m}{2} v_i^2 \quad (3)$$

and v_i is the equivalent initial velocity,

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \gamma r_A}{r_P(r_P + r_A)} + \frac{2 \gamma y_P}{r_P \cdot r_{00}}} \quad (4)$$

where

$$\gamma \equiv \gamma_{\oplus} = (v_c)_P^2 r_P = 6.254 \cdot 10^4 \frac{\text{n} \cdot \text{mi}^3}{\text{sec}^2} = 1.4055 \cdot 10^{16} \frac{\text{ft}^3}{\text{sec}^2} \quad (5)$$

is a constant of the terrestrial gravity field.

Since y_P must be low enough to cause action of aerodynamic forces on the vehicle (i. e. $y_P < 300,000$ ft), one can put $y_P/r_{00} \sim 0$, and obtains per unit mass,

$$E_i = \frac{\gamma r_A}{r_P(r_P + r_A)} \frac{\text{ft-lb}}{\text{lb}}. \quad (6)$$

The initial energy is of the order of $4 \cdot 10^8$ ft-lb/lb in the range of relevant orbital altitudes ($1.1 \leq r_A/r_{00} \leq 1.2$).

This is about one magnitude greater than the energy presently gained from chemical propellants ($200 \leq I_{sp} \leq 300$ lbf sec/lbf).

The dissipation of this enormous amount of energy without destroying the body or its inhabitants, represents the fundamental problem connected with the descent of an orbital vehicle.

Aside from the use of thrust power for braking, the only means of removal is dissipation into the atmosphere. Frictional heating is the most powerful single effect capable of destroying the body; but, since this phenomenon cannot be avoided entirely, the fundamental problem is, more specifically, that of reducing frictional heating at any time during the descent to a safe or tolerable minimum.

The nature of the problem is well recognized. This paper is concerned mainly with a general velocity-altitude relation and its effect on the various external conditions which have a bearing on the heating — as well as on the dissipation problem during the descent. The results form the basis for further discussions in subsequent papers.

II. Dissipation of Energy

Energy is transferred to the air by means of friction, shock wave formation, and vortex formation as explained schematically in Fig. 2.

Friction causes heating of the air, slowed down in the boundary layer which is a comparatively thin layer of gas flow adjacent to the skin or wall, and in which the effects of air viscosity cannot be neglected. Friction drag is not desirable if the conditions just outside the boundary layer are such that a technically significant amount of heat is transferred to the body by means of forced convec-

tion. These conditions are, for instance, high pressure and high temperature outside the boundary layer, or large REYNOLDS number per unit length. They can, to a certain extent at least, be avoided by maintaining highest possible glide altitude at a given flight velocity.

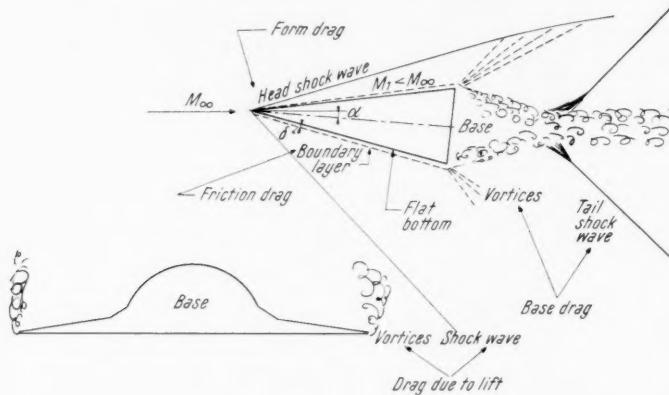


Fig. 2. Dissipation of energy of the orbital vehicle.

Shock waves, originating from the nose or leading edge have an important influence on boundary layer and heat transfer. Firstly, they produce an increase in pressure p_δ and temperature T_δ just outside the boundary layer — and inside the boundary layer as well — thereby causing the heat transfer coefficient to increase. This results in a higher heat transfer rate, if the wall temperature T_w is kept constant by a correspondingly higher rate of cooling. In this case, the wall-to-air temperature ratio T_w/T_δ is reduced. This has a stabilizing effect on the boundary layer, as pointed out by LEES and LIN [1, 2]. Stability is desirable, because it tends to delay the transition from laminar to turbulent boundary layer flow; a process which, at higher REYNOLDS numbers, leads to a considerable increase in heat transfer rate. Secondly, MACH number and REYNOLDS number are reduced below free stream value in the flow field behind a shock wave. In incompressible flow a REYNOLDS number reduction is essential for increased laminar boundary layer stability. At high supersonic and hypersonic velocities, however, the REYNOLDS number is comparatively less important. The beforementioned stability theory by LEES and LIN indicates that, aside from the temperature ratio T_w/T_δ , the MACH number just outside the boundary layer, M_δ , is the important parameter. In fact, for a given ratio T_w/T_δ , the possibility of stabilizing the laminar boundary layer at all seems to depend essentially on the MACH number. Investigations by VAN DRIEST [3], assuming flow over a flat plate, show that for a free stream REYNOLDS number $Re_0 > 8 \cdot 10^4$, the boundary layer cannot be kept stable at MACH numbers above 9, independent of the amount of cooling, i. e. even at $T_w/T_\delta = 0$ ¹. Thus, if an adequate MACH number reduction

¹ Under the conditions assumed, viz. PRANDTL number 0.75 and SUTHERLAND viscosity law for air. These conditions do not apply at very high speed due to dissociation in the boundary layer. The changes are in the direction of a stability limit at higher MACH number than 9. It may be emphasized that destabilization of the boundary layer does not imply transition. However, an unstable laminar layer is readily contaminated by local turbulent spots. Their growth within the boundary layer actually constitutes the transition [4].

can be accomplished, the stabilizing effect of shock waves may indeed be significant. It must be kept in mind, however, that, in preventing, turbulence by reducing the MACH number through strong shock waves, conditions outside the boundary layer are necessarily created which greatly increase the heat transfer rate even if laminarity is maintained. In view of the comparatively long duration of the descent (of the order of one to two hours) this cannot be overlooked. VAN DRIEST's calculations show [3] that with decreasing free stream REYNOLDS number Re_0 (or, in the presence of 2-dimensional shock waves, with decreasing $Re_\delta = Re_1$) the limiting MACH number for $T_w/T_\delta = 0$ is increased above 9, hence, the shock strength required for appropriate MACH number reduction outside the boundary layer is decreased. Unfortunately, a significant increase in limiting MACH number seems to be obtainable only at very low values of Re_0 (or Re_δ), namely below about 500. Fig. 4 below shows that even under very favorable technical conditions the lowest free stream REYNOLDS number per foot (to be expected when aerodynamic forces begin to become effective), are of the order of 6,000 to 10,000. For a REYNOLDS number of 10,000 Reference [3] gives a limiting MACH number of about 9.4 at a wall-to-air temperature ratio $T_w/T_\delta = 0$; an insignificant increase over the limiting MACH number of 9 at higher REYNOLDS numbers. Actually, the above extreme temperature ratio could of course not be realized. At $T_w/T_\delta = 1$ the limiting MACH number is 8.4 and at $T_w/T_\delta = 2$ it has fallen to about 6.4. Consequently, in view of the very high free stream MACH numbers during the initial phase of the descent (cf. Fig. 5 below), it appears that stabilization of the laminar boundary layer can be accomplished only by means of very strong shock waves. This situation obviously becomes less severe if one succeeds in maintaining a sufficiently high glide altitude down to as low a MACH number as possible, so that even in the case of turbulence, the convective heat transfer rate is kept at a satisfactorily low level due to lack of sufficient pressure in the boundary layer¹. For this reason, not drag alone, but drag which augments the lift is really desirable. Obviously, the higher the altitude, the smaller will be the penalty in the form of increased laminar heat transfer rate associated with boundary layer stabilization by means of a shock wave, if and when this ultimately can be ascertained to be a necessity.

The above discussion is based on the assumption that VAN DRIEST's numerical results can be verified experimentally. VAN DRIEST [3] points out that, on the basis of the theory, with decreasing PRANDTL number Pr (and Pr decreases with increasing temperature, if there is no dissociation of the air molecules), the limiting MACH number is increased, particularly, if the SUTHERLAND viscosity law for air can be used. Experimental data (e. g. Fig. 17 in Ref. [20]) indicates that the SUTHERLAND law applies with good accuracy up to about 3,000 °R. At this temperature the air is not yet dissociated, even at extremely low pressure (cf. Fig. 12), and therefore a PRANDTL number of 0.635 can be assumed. Fig. 10 in Ref. [3] indicates for this case a maximum limiting MACH number of about 13 (for $Re_0 = \infty$ and $T_w/T_0 = 0$), compared to $M_0 = 9$ at $Pr = 0.75$. With a maximum ambient air temperature of about 600 °R between 300,000 ft and sea level (tentative standard atmosphere), a temperature of 3,000 °R corresponds to a temperature ratio T_1/T_0 of not less than 5 across the shock wave. Now assume, for instance, a flat plate moving at an angle of attack of 14.7° in an air flow of MACH number 14 normal to the leading edge. Based on the ratio $T_1/T_0 = 5$ and on a ratio of specific heats of 1.38 (using $\bar{c}_p = 0.26 \text{ Btu/lb}^{\circ}\text{R}$ as approximately mean value between 600 and 3,000 °R), one obtains a shock angle

¹ Cf. a subsequent paper.

of 19^0 , a pressure ratio $p_1/p_0 = 24$, across the shock, and a MACH number behind the shock of $M_1 = 6$. The above angle of attack is probably 2 to 3 times as large as required for maximum lift/drag ratio, which yields maximum range. For the present case, however, which requires maximum lift only, this angle is not excessively large and, in fact, may well be exceeded. This example shows that even the theoretical conditions will be somewhat more favorable than indicated by VAN DRIEST's results for $Pr = 0.75$. In addition, the few experimental data available (References [22] to [25]) appear to offer only qualitative verification while, quantitatively, they indicate less sensitivity against heating or cooling of the wall than the theory anticipates. This trend, of course, is very fortunate — provided it can be established also for hypersonic flow — since it would impose less stringent conditions on the required extent of surface cooling. The beforementioned experimental results are particularly interesting, because they contain the effect of supersonic wind tunnel turbulence and therefore should rather be more sensitive to wall temperature conditions than VAN DRIEST's results.

On these premises then, there is a reason for the assumption that the laminar boundary layer stability conditions may be less precarious than indicated by the stability theory, and that, consequently, less wave drag is acceptable, at least as far as boundary layer stability is concerned.

Head wave drag may be caused by bluntness of leading parts (form drag), or by inclination of the body axis with respect to the free stream direction (Fig. 2).

Form drag, as a means of energy dissipation, carries the penalty of increasing the heat transfer rate without increasing the glide altitude. An equal amount of drag due to lift is preferable, because it ensures, at the same time, the advantage of higher glide altitude. Furthermore, the above numerical example indicates that the shock waves resulting from the high angles of attack are likely to create laminar boundary layer stability.

Vortices and tail shock waves clearly are the most desirable means of energy dissipation, since they remain behind in the wake and cannot return part of the energy to the body as in the case of frictional heating and head shock waves. Unfortunately, the base drag which accounts for the tail shock waves and part of the vortex formation behind the base, decreases rapidly with increasing MACH number. Drag due to lift is also in part produced by the formation of vortices.

At high altitudes and at hypersonic flight speeds, a high lift coefficient can be attained only at comparatively large angles of attack. Since a high lift coefficient is necessary for maintaining maximum glide altitude, it can be expected that drag due to lift is, and should be, a major factor in reducing the vehicle velocity.

The preceding considerations have an important bearing on the selection of a suitable body configuration for the orbital glider. They advocate high glide altitude, large base drag and drag due to lift, but caution against an unqualified demand for high form drag.

Because of the crucial importance of high glide altitude, the external conditions during the descent will be discussed in the subsequent section as function of the speed-altitude variation.

III. Conditions During the Descent

Except in the case of an intentional dive, the descent occurs along a smooth glide path, determined at any time by the requirement of equality of lift L , and apparent vehicle weight, defined by

$$W_{app} = W - F_c = W \left(1 - \frac{v_0^2 r}{\gamma} \right) \quad (7)$$

Vol
1
195

where v_0 is the flight velocity at the instantaneous distance $r = r_{00} + y$ and F_c the apparent centrifugal force. Thus,

$$L = C_L S \frac{\rho_{00}}{2} \sigma v_0^2 = W \left(1 - \frac{v_0^2 r}{\gamma} \right). \quad (8)$$

where C_L is the lift coefficient, S the lifting area, and σ the ratio of density at altitude y to surface density. Solving for σ yields a measure for the instantaneous altitude

$$\sigma = \frac{W}{S C_L \rho_{00} \gamma} \left(\frac{\gamma}{v_0^2} - r \right). \quad (9)$$

Introducing the general glide parameter $\sigma C_L / (W/S)$, using $\rho_{00} = 2.378 \cdot 10^{-3}$ slug/cu ft so that $\rho_{00} \gamma = 3.34228 \cdot 10^{13}$ lb/ft, and finally again approximating $y/r_{00} \sim 0$, one obtains

$$\frac{\sigma C_L}{W/S} = 6 \cdot 10^{-14} \left(\frac{\gamma}{v_0^2} - r_{00} \right) \frac{\text{ft}^2}{\text{lb}}. \quad (10)$$

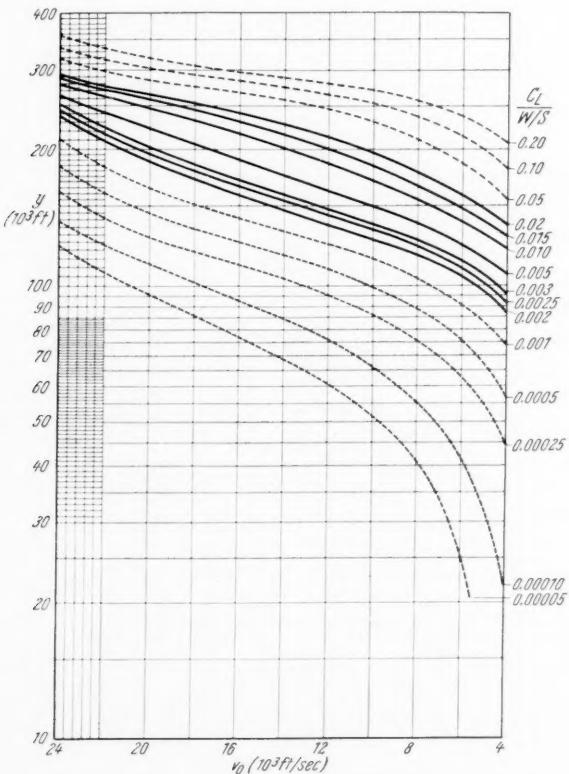


Fig. 3. Glide altitude vs. flight velocity as function of the lift parameter.

The glide parameter, now a function of v_0 only, is tabulated in Table I. Using these values, the graph Fig. 3 was constructed which presents the glide altitude as function of the flight speed for different values of the lift parameter $C_L/(W/S)$,

using the density-altitude values of Table 13 of Reference [5]. The solid curves indicate the range of lift parameters in which the actual average value can be expected to lie, for, due to variation of the lift coefficient with speed and altitude, the glider will not descend along an individual curve in Fig. 3 but will cut through these lines. They are, however, of interest as limiting or as average curves. Higher lift parameters than those represented by the solid lines are desirable, but probably are technically not feasible, since they correspond to extremely small lifting area loads W/S , in view of the lift coefficients to be expected at the given speeds and altitudes. In the first approximation, the lifting area load can be expected to lie between 10 and 30 lb/ft². With average values for the lift coefficient to be expected as $0.09 \leq C_L \leq 0.015$ (based on lifting area) in the speed range $24,000 \leq v_0 \leq 4,000$ ft/sec, the lift parameter range most likely to be realized will therefore be

$$0.003 \leq C_L/(W/S) \leq 0.015.$$

The solid curves in Fig. 3 range from 0.002 to 0.02. It can be seen that, except for the very favorable values above 0.01, a maximum deceleration is indicated in the altitude region between 200,000 and 130,000 ft.

The free stream REYNOLDS number per foot is shown in Fig. 4 for different values of the lift parameter, using the viscosity values given in Reference [6].

The correlation between MACH number, flight velocity and altitude for the range of lift parameters is presented in Fig. 5.

Table 1. *Glide Parameter*

Velocity v_0 (ft/sec)	Glide Parameter $\sigma C_L/(W/S)$ (ft ² /lb)
1,000	$8.35 \cdot 10^{-4}$
2,000	$1.98 \cdot 10^{-3}$
3,000	$9.35 \cdot 10^{-5}$
4,000	$5.11 \cdot 10^{-5}$
6,000	$2.22 \cdot 10^{-5}$
8,000	$1.19 \cdot 10^{-5}$
10,000	$7.19 \cdot 10^{-6}$
12,000	$4.57 \cdot 10^{-6}$
14,000	$3.03 \cdot 10^{-6}$
16,000	$2.04 \cdot 10^{-6}$
18,000	$1.35 \cdot 10^{-6}$
20,000	$8.45 \cdot 10^{-7}$
22,000	$4.76 \cdot 10^{-7}$
24,000	$2.34 \cdot 10^{-7}$
26,000	0

Fig. 6, based on the preceding Figures, shows free stream REYNOLDS number, flight velocity, and altitude for the individual lift parameters in relation to the four main flow regimes suggested by H. S. TSIEN [7], namely, free molecule flow, intermediate (fluid mechanics) region, slip flow, and continuum flow. These regions differ in regard to the mechanics of boundary layer flow, especially with respect to the relative significance of collisions among molecules, compared to molecule-wall collisions. The fundamental parameters are the molecular free path length λ and the boundary layer thickness δ .

In continuum flow ($\lambda/\delta \approx M/\sqrt{Re} \leq 0.01$), intermolecular collisions are dominant. In the other extreme case, that of free molecule flow ($\lambda/\delta \approx M/Re \geq 10$),

intermolecular collisions are infrequent enough to be negligible compared to molecule-wall collisions. In between are two transition regions: the fluid mechanics region, $1 \leq M/\sqrt{Re} \leq 10$, where both types of collision are of about equal significance; and the slip flow region, $0.01 \leq M/\sqrt{Re} \leq 1.0$, where the mean free path is small, but not negligible compared to the boundary layer thickness.

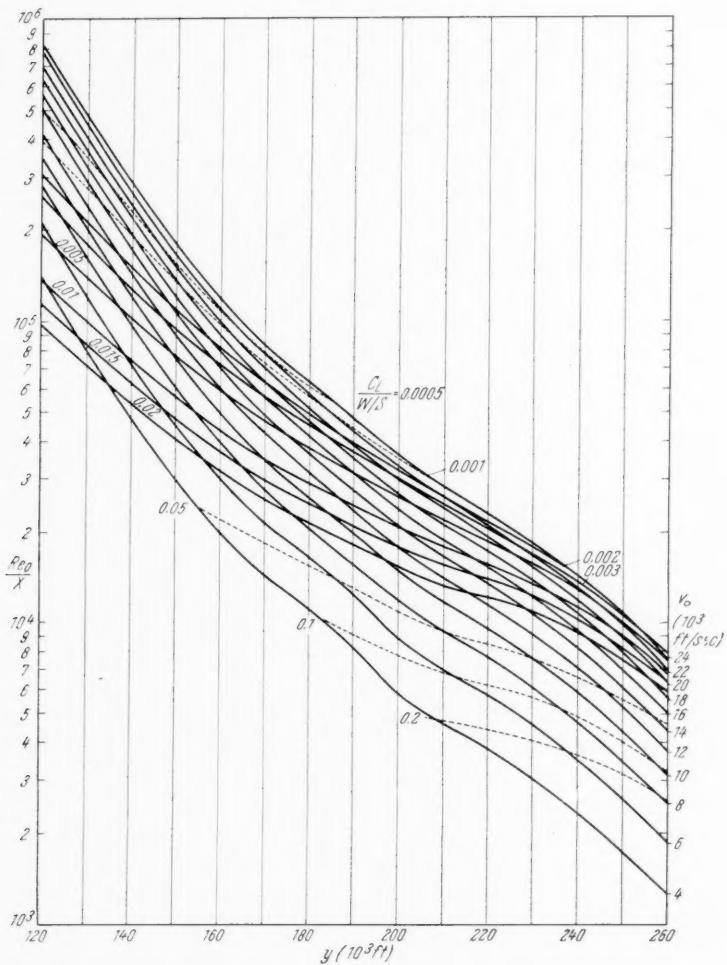


Fig. 4. REYNOLDS number per foot for several lift parameters.

It may be emphasized that Fig. 6 applies to free stream conditions only. The actual conditions just outside the boundary layer are different due to shock wave formation at the leading edge. However Fig. 6 presents the data in front of the shock wave. These data must be known if one wants to compute the flow

behind the shock wave for a given angle of attack. The angle of attack follows from NEWTONIAN flow theory for a given lift coefficient. This will be discussed in a subsequent paper.

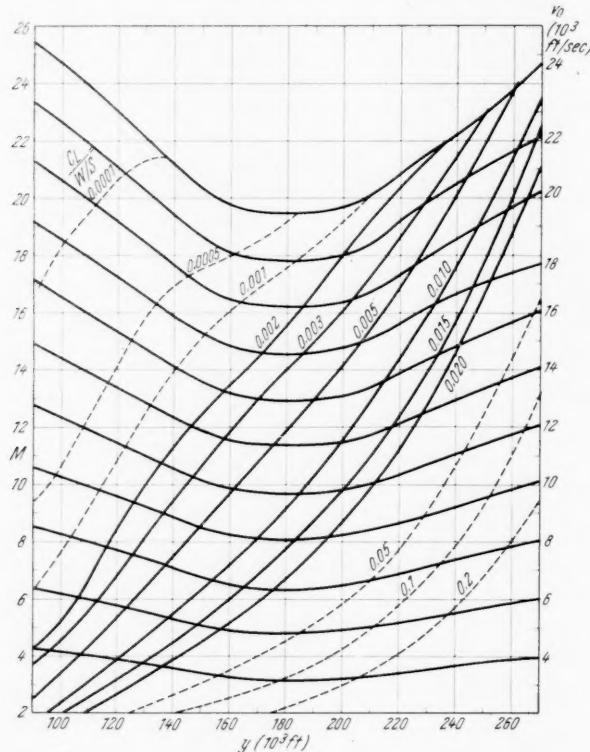


Fig. 5. MACH number and flight velocity correlation.

With changing flow regime, the extent of friction and convective heat transfer varies under otherwise equal conditions. Theoretical analysis (e. g. [8]), supported by experimental evidence [9], indicates in the slip flow regime two discrete effects, the interaction effect and the slip effect proper. It has been found that the interaction effect increases the friction coefficient in supersonic flow, but apparently does not affect the heat transfer. Interaction effects are caused by the disturbance of the free-stream pressure on a flat plate by the boundary layer proper which, in slip flow, has greater thickness than in continuum flow at the same free stream velocity. The slip effect causes a temperature discontinuity at the wall where the air does not come to rest as can be assumed when dealing with continuum flow conditions. The slip effect reduces the heat transfer, but, in the first order, does not seem to affect the skin friction coefficient.

Another important effect for the present considerations is that of interaction between shock wave and boundary layer at extremely high (hypersonic) speeds (cf. e. g. [10]). At values of the parameter $M_0^3/\sqrt{Re_0} = \chi \gg 1$ a strong interaction takes place. The normal velocity induced by the boundary layer flow produces

Vol
1
195

significant changes in the external flow. These changes, in turn, feed back into the boundary layer. This interaction occurs in continuum flow, but also in that portion of the slip flow in which the slip effect proper can be neglected. This is the region

$0.01 \leq M_0/\sqrt{Re_0} \leq 0.1$ which is also indicated in Fig. 6. In this region as well as in the continuum flow region, LEES [10] and others [11, 12]¹ find evidence for a considerable increase in skin friction and—in the case of cooled surfaces [10]—also in the heat transfer rate. This effect becomes more pronounced as the MACH number increases, but is comparatively small at MACH numbers below 15 (cf. Fig. 1 of Reference [10]) or, more generally, when $\bar{z} < \sim 4$, where

$$\bar{z} = z \sqrt{C},$$

$C = (T_w/T_0)^{m-1}$, $m < 1$ ($m = 0.76$ used in Reference [10]). Fig. 1 of Reference [10] also indicates that the increase of the friction and heat transfer coefficient with MACH number becomes more pronounced with decreasing REYNOLDS number; e. g. below $Re \sim 5 \cdot 10^5$ for $M = 25$, below $Re \sim 2 \cdot 10^5$ for $M = 20$, or below $Re \sim 10^5$ for $M = 15$, this effect is particularly strong.

¹ In [11] and [12] the case of insulated walls has been treated. In that case the increase in friction is particularly large.

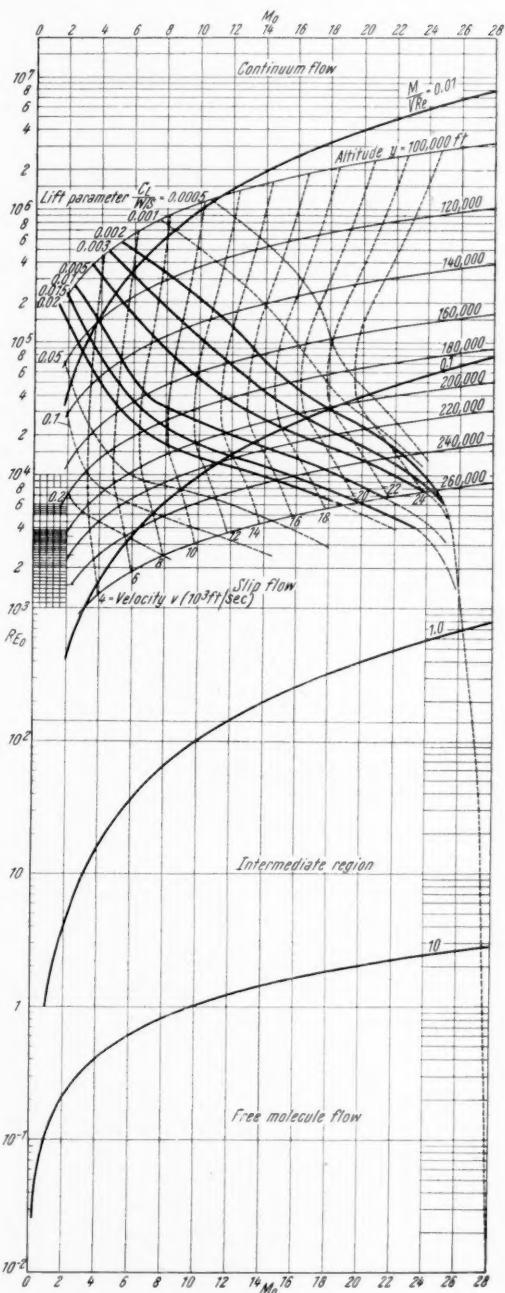


Fig. 6. Flow regimes during the descent.

Because of the significance of the hypersonic strong shock wave-boundary layer interaction, the parameter χ is plotted in Fig. 7 versus glide altitude for a number of lift parameters.

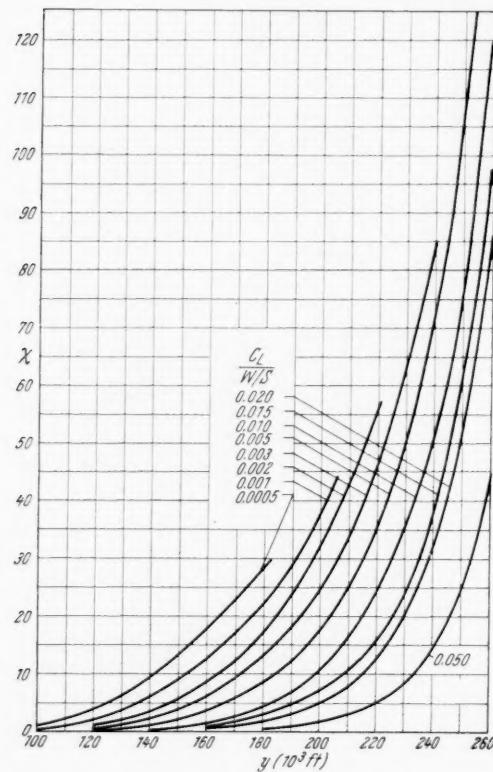


Fig. 7.
Parameter χ vs. altitude for several lift parameters.

Since slip effects will have to be taken into account at $M/\sqrt{Re} > 0.1$, (cf. also [13]), and since they will cause a relief from the conditions presumably brought about by strong hypersonic shock-boundary layer interaction, very high lift parameters are helpful in practically eliminating this "danger" zone completely: At very high values of χ , the vehicle is then in the region $M/\sqrt{Re} > 0.1$; and, upon entering the region $M/\sqrt{Re} < 0.1$, the value of χ is so small that the case is either that of a weak interaction warranting a small correction only [14] or that of a completely negligible hypersonic interaction effect.

This becomes particularly evident in Fig. 9 which shows the local skin friction coefficient (and twice the local laminar heat transfer coefficient), for different lift parameters in the region between $\chi > 4$ and $M/\sqrt{Re} < 0.1$ in which correction for strong hypersonic interaction correction applies. The approximate local skin friction relation for the case of heat transfer between boundary layer and wall, in Reference [10], has been used for calculating the skin friction coefficient.

The very strong influence of the lift parameter and its importance in reducing the length of flight in the region of strong hypersonic interaction is evident.

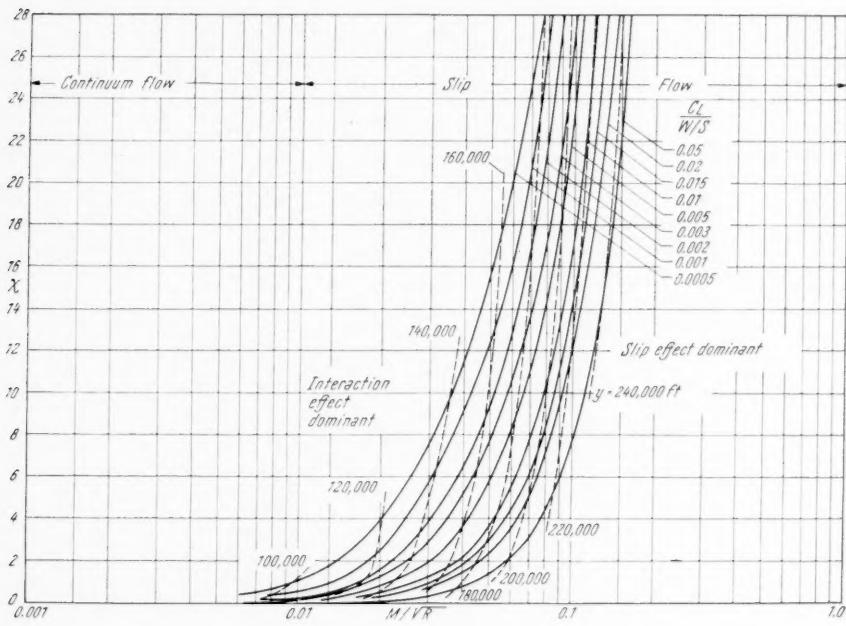


Fig. 8. Variation of χ with M/VRe for different lift parameters.

It can be seen that with decreasing lift parameter the velocity range within the region $0.1 \geq M/VRe \geq 0.01$ increases rapidly. In view of the hypersonic shock-boundary layer interaction, this region appears to be the most critical, inasmuch as the flight speed can still be very high, at unfavorable lift parameters, while slip does no longer seem to offer any appreciable relief.

In order to estimate the effect of the lift parameter on the temperature conditions during the descent, the velocity-enthalpy relation

$$\Delta h = \frac{\eta \Delta H}{(MW)} = \frac{\eta v_0^2}{2gJ} = \frac{\eta v_0^2}{50,116} \text{ Btu/lb} \quad (11)$$

is plotted in Fig. 10 for different values of the recovery factor η ,

$$\eta = \frac{T_i - T_\delta}{T_{st} - T_\delta} \quad (12)$$

where T_i is the insulated wall temperature, attained by the wall under conditions of complete insulation including the absence of radiation cooling. T_i is equal to the boundary layer temperature. The stagnation temperature is given by

$$T_{st} = \frac{v_0^2}{2gJ \int_{T_\delta}^{T_{st}} \frac{1}{c_p} dt} \quad (13)$$

where T_δ is the temperature behind a shock wave just outside the boundary layer, or, in absence of a shock wave, identical with the free stream temperature T_0 .

At the higher flight velocities, the equivalent enthalpy which has to be absorbed by the air in the boundary layer becomes so large that dissociation

Vol.
1
1955

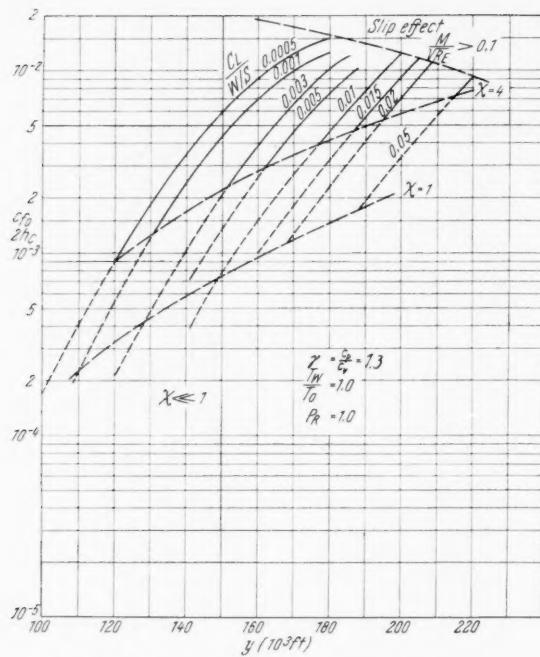


Fig. 9. Region of strong hypersonic interaction.

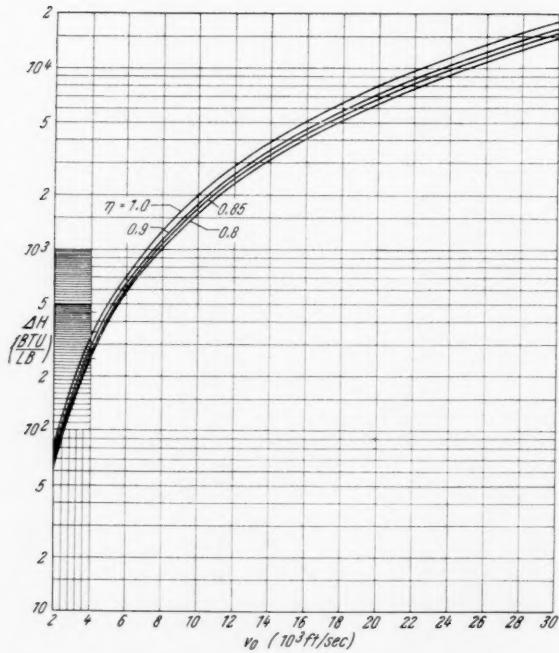


Fig. 10. Velocity-enthalpy relation for different recovery factors.

Vol
1
195

results, especially since the highest enthalpy values belong to the highest altitudes, that is, lowest air pressures. Enthalpy and air temperature are correlated in Fig. 11 for the case of no dissociation (pressure-independent) and for the

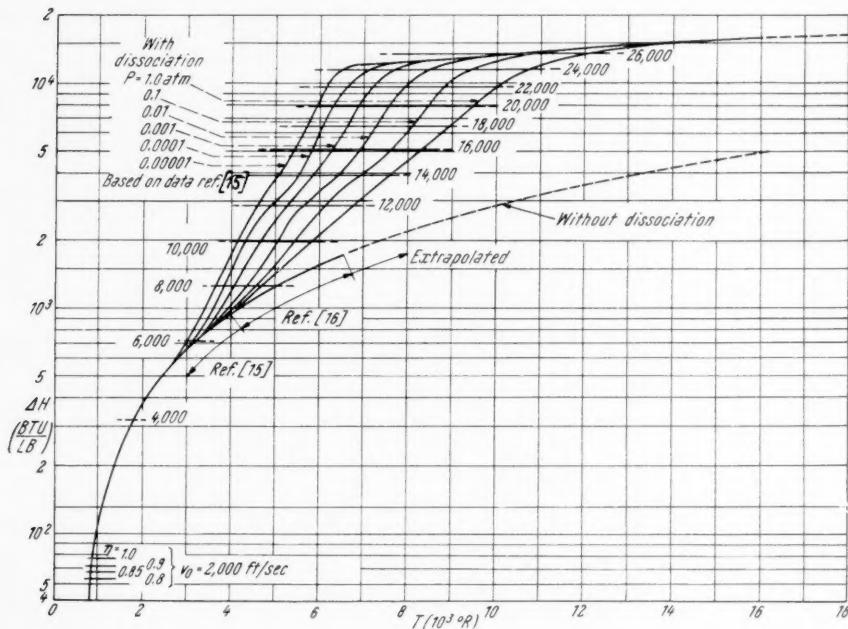


Fig. 11. Correlation between velocity, stagnation temperature and enthalpy of dissociating air at different pressures.

$P = 1 \text{ atm}$ sea level

0.1	$\approx 57,000 \text{ ft}$
0.01	$\approx 102,000 \text{ ft}$
0.001	$\approx 165,000 \text{ ft}$
0.0001	$\approx 240,000 \text{ ft}$
0.00001	$\approx 298,000 \text{ ft}$

Assumptions: Isothermal atmosphere, $T = 298.16^\circ \text{ K} = 536.69^\circ \text{ R}$, $H_{536.69^\circ \text{ R}} = 0$.

Recovery factor $\eta = 1$ except where noted otherwise.

case of consideration of dissociation at different pressures. A number of flight velocities is shown, pertaining to a recovery factor of 1.0, except where noted otherwise. The enthalpy values of the dissociated gas are based on data given in Reference [15]. Those for the non-dissociating air are taken in part from Reference [15] and in part from Reference [16], as indicated in Fig. 11. It can be seen that dissociation causes a considerable decrease in air temperature. This temperature is shown in Fig. 12 for different flight velocities as function of the altitude, in relation to the limiting values of the lift parameter. It can be seen that — on the basis of an isothermal atmosphere which has been assumed here for the sake of simplicity and clarity — there is no altitude effect on the temperature at low flight velocities up to about 4,000 ft/sec, because dissociation is absent or negligible, even at extremely low pressures. Gradually, with

increasing flight speed, the effect of dissociation influences the temperature rise, first at higher altitudes, but finally throughout the entire atmosphere down to surface pressure. At extremely high flight velocities, roughly from about

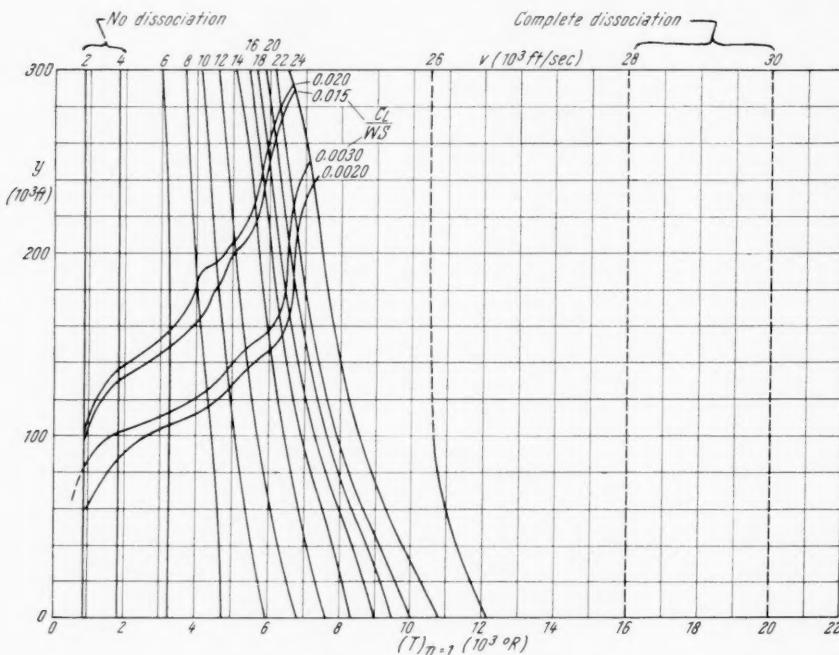


Fig. 12. Stagnation temperature vs. altitude and velocity. Assumptions: Isothermal atmosphere, $T = 536.69^0$ R, Dissociation equilibrium assumed.

27,000 ft/sec on upward, there is again no altitude effect, because, at all pressures, the dissociation of the air is complete. Based on Fig. 12, the effect of the lift parameter on the maximum temperature of dissociating air encountered during the descent is shown in Fig. 13. The effect of the lift parameter is seen to be small. These temperatures assume zero relaxation time in establishing dissociation equilibrium. In reality, the finite relaxation times will lead to higher temperatures before equilibrium is established.

In contrast, the effect of the lift parameter on the free stream pressure during the descent is very large, as illustrated in Fig. 14. This strong influence is very important, since, for a given temperature and MACH number, the heat transfer rate into the body is essentially determined by the pressure.

In summarizing, it can be stated that the general conditions during the descent can be expressed conveniently by means of the lift parameter as independent variable. The lift parameter has a dominant influence on the altitude-velocity correlation during the descent. It is seen that no technically feasible lift parameter can reduce the free stream REYNOLDS number sufficiently for permitting stabilization of the laminar boundary layer without shock waves or even with weak shock waves only; assuming the theoretical stability conditions presented by LEES, LIN and VAN DRIEST are correct. The lift parameter,

however, is a very important indicator of aerodynamic as well as design requirements to avoid very strong shock waves merely for the sake of boundary layer stabilization and to reduce appreciably the length of flight through the "danger"

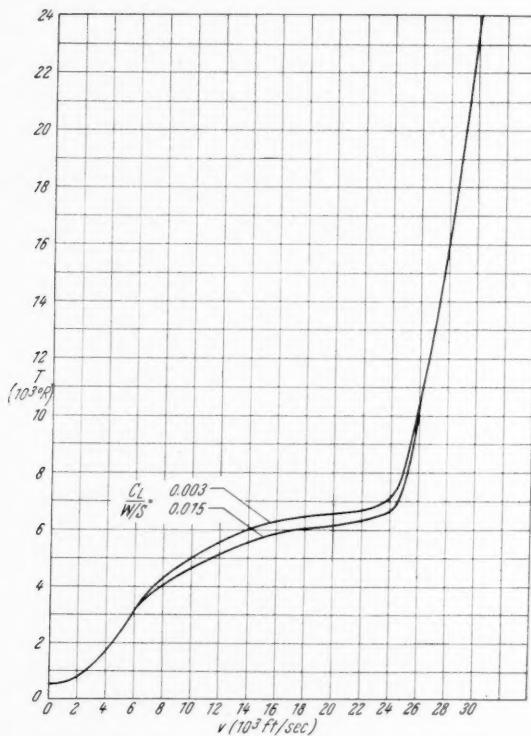


Fig. 13. Effect of the lift parameter on the stagnation temperature of dissociating air during the descent (isothermal atmosphere, $T = 536.69^\circ \text{R}$).

zone in the lower slip flow region and in the upper continuum flow region where strong hypersonic shock wave — boundary layer interaction may lead to particularly high heat transfer coefficients, laminar or turbulent. A large lift parameter is also important for cushioning the effect of high boundary layer temperatures on the heat transfer rate to the wall, by minimizing the pressure in the boundary layer. On the other hand, the influence of the lift parameter on the maximum temperature of dissociating air outside or inside the boundary layer is small. From this result it can also be inferred that the lift parameter does not affect significantly the temperature in the flow field behind oblique shock waves.

In connection with oblique shock waves, however, it may be remarked here that, inasmuch as the lift parameter is determined by the lift coefficient C_L , an increase in C_L by means of increased angles of attack may produce a strong increase in the gas temperature outside the boundary layer. Fig. 13, therefore, merely states that the lift parameter in its quality as an altitude parameter has comparatively little effect on the temperature in flow fields behind shock waves.

Vol.
1
1955

As mentioned before, the outstanding importance of large lift parameters in preventing a destructive or damaging heat transfer rate into the body, is through

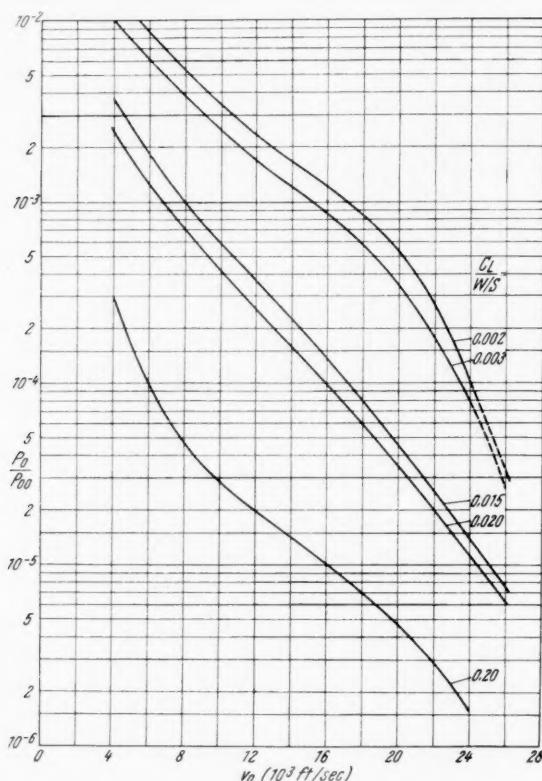


Fig. 14. Effect of lift parameter on free stream pressure.

pressure reduction. The interaction between lift parameter and heat transfer will be discussed in a subsequent paper.

References

1. L. LEES and CHIA CHIAO LIN, Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. N.A.C.A. Techn. Note No. 1115, Washington, Sept. 1946.
2. L. LEES, The Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. N.A.C.A. Rep. No. 876, Washington, 1947.
3. E. R. VAN DRIEST, Calculation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid on a Flat Plate with Heat Transfer. J. Aeronaut. Sci. **19**, 801 (1952).
4. H. W. EMMONS, The Laminar Turbulent Transition in a Boundary Layer — Part I. J. Aeronaut. Sci. **18**, 490 (1951).
5. G. GRIMMINGER, Analysis of Temperature, Pressure, and Density of the Atmosphere Extending to Extreme Altitudes. The RAND Corporation, R-105, Santa Monica, California, Nov. 1948.

- Vol.
1
1955
6. C. N. WARFIELD, Tentative Tables for the Properties of the Upper Atmosphere. N.A.C.A. Techn. Note No. 1200, January 1947.
 7. H. S. TSIEN, Superaerodynamics, Mechanics of Rarified Gases. J. Aeronaut. Sci. **13**, 653 (1946).
 8. ST. H. MASLEN, Second Approximation to Laminar Compressible Boundary Layer on a Flat Plate in Slip Flow. N.A.C.A. Techn. Note No. 2818, Washington, Nov. 1952.
 9. S. A. SCHAAF and F. S. SHERMAN, Skin Friction in Slip Flow. J. Aeronaut. Sci. **21**, 85 (1954).
 10. L. LEES, On the Boundary Layer Equations in Hypersonic Flow and Their Approximate Solutions. J. Aeronaut. Sci. **20**, 143 (1953).
 11. S. F. SHEN, Hypersonic Flow Over an Insulated Wedge with Viscosity Effects. Pt. I of a Sc. D. Thesis, Dept. of Aeronautical Engineering, Mass. Inst. of Technology, 1949.
 12. TING-YI LI and H. T. NAGAMATSU, Shock Wave Effects on the Laminar Skin Friction on an Insulated Plate at Hypersonic Speeds. Contract No. DA—04—495—Ord—19 Memorandum No. 9 (GALCIT), July 1, 1949.
 13. H. MIRELS, Estimate of Ship Effect on Compressible Laminar Boundary Layer Skin Friction. N.A.C.A. Techn. Note No. 2609, Washington, Jan. 1952.
 14. L. LEES and R. F. PROBSTINE, Hypersonic Viscous Flow over a Flat Plate. Princeton University, Aeronautical Engineering Laboratory Report No. 195, April 20, 1952.
 15. F. J. KRIEGER and W. B. WHITE, The Composition and Thermodynamic Properties of Air at Temperatures from 500 to 8,000 °K and Pressures from 0.000 01 to 100 Atmospheres. Project RAND, The RAND Corporation, R—149, Santa Monica, California, April 1949.
 16. J. H. KEENAN and J. KAYE, Gas Tables. New York: J. Wiley & Sons, Inc., 1948.

Vol
1
195

6. C. N. WARFIELD, Tentative Tables for the Properties of the Upper Atmosphere. N.A.C.A. Techn. Note No. 1200, January 1947.
7. H. S. TSIEN, Superaerodynamics, Mechanics of Rarified Gases. J. Aeronaut. Sci. **13**, 653 (1946).
8. ST. H. MASLEN, Second Approximation to Laminar Compressible Boundary Layer on a Flat Plate in Slip Flow. N.A.C.A. Techn. Note No. 2818, Washington, Nov. 1952.
9. S. A. SCHAAF and F. S. SHERMAN, Skin Friction in Slip Flow. J. Aeronaut. Sci. **21**, 85 (1954).
10. L. LEES, On the Boundary Layer Equations in Hypersonic Flow and Their Approximate Solutions. J. Aeronaut. Sci. **20**, 143 (1953).
11. S. F. SHEN, Hypersonic Flow Over an Insulated Wedge with Viscosity Effects. Pt. I of a Sc. D. Thesis, Dept. of Aeronautical Engineering, Mass. Inst. of Technology, 1949.
12. TING-YI LI and H. T. NAGAMATSU, Shock Wave Effects on the Laminar Skin Friction on an Insulated Plate at Hypersonic Speeds. Contract No. DA-04-495-Ord-19 Memorandum No. 9 (GALCIT), July 1, 1949.
13. H. MIRELS, Estimate of Ship Effect on Compressible Laminar Boundary Layer Skin Friction. N.A.C.A. Techn. Note No. 2609, Washington, Jan. 1952.
14. L. LEES and R. F. PROBSTEIN, Hypersonic Viscous Flow over a Flat Plate. Princeton University, Aeronautical Engineering Laboratory Report No. 195, April 20, 1952.
15. F. J. KRIEGER and W. B. WHITE, The Composition and Thermodynamic Properties of Air at Temperatures from 500 to 8,000 °K and Pressures from 0.000 01 to 100 Atmospheres. Project RAND, The RAND Corporation, R-149, Santa Monica, California, April 1949.
16. J. H. KEENAN and J. KAYE, Gas Tables. New York: J. Wiley & Sons, Inc., 1948.

Vol.
1
1955

Buchbesprechung — Book Review — Compte rendu

Space-Flight Problems — Probleme der Weltraumforschung — Problèmes d'astronautique. Vollständige Sammlung der am IV. Internationalen Astronautischen Kongreß 1953 in Zürich gehaltenen Fachvorträge. Mit zahlreichen Abb. 224 S. Biel/Schweiz: Laubscher & Cie. 1955.

In diesem Band sind dreißig Vorträge vereinigt, die das ganze weite Gebiet der Astronautik umspannen. Sie bilden eine Fundgrube erlesener Beiträge zu allen Fragen der Weltraumfahrt. Technik, Astronomie, Medizin, Psychologie und andere Wissenschaften sind vertreten. In diesen Arbeiten spiegelt sich das Bild des gegenwärtigen Standes der Weltraumfahrt, und zwar in dem Sinne, daß neben Untersuchungen, die in der Praxis und Gegenwart fußen, wie „Über ringförmige Tragflügel“, „Strahlumlenkung für Bremszwecke“ oder „Untersuchungen über Schwerelosigkeit an Versuchspersonen und Tieren während des lotrechten Sturzfluges“, andere Beiträge zu finden sind, die unserer Zeit weit vorausseilen, wie „Zur Theorie der Photonensatelliten“, „Fabrication of the Orbital-Vehicle“ oder „Le ravitaillement dans l'espace et le problème des polistades“.

Die Arbeiten sind in den Originalsprachen gedruckt. Zusammenfassungen in den jeweils beiden anderen Kongreßsprachen sind nicht gegeben, das mag vielleicht für manchen Leser ein Nachteil sein. Die technische Ausstattung des Bandes muß als vorbildlich bezeichnet werden. Er wird in der Geschichte der streng fachlichen astronautischen Literatur eine besondere Stellung einnehmen und ist für jede astronautische Fachbücherei unentbehrlich.

E. DOLEZAL, Wien.

Thermodynamic Theory of Rocket Motor with Hydrazine and Nitric Acid as Fuels

By

J. M. J. Kooy, Breda¹, NVR

(With 1 Figure)

(Received May 25, 1955)

Abstract. In this paper, a thermodynamic theory of the rocket is developed, with hydrazine and nitric acid as fuels, taking into account the recombination of the molecules during the expansion of the gases in the nozzle.

Equations are derived by which the concentrations in the expanding mixture can be found as functions of pressure and temperature, and the exhaust speed can be computed if the pressure in the combustion chamber is prescribed.

Zusammenfassung. Es wird eine thermodynamische Theorie einer Flüssigkeitsrakete entwickelt, wobei die Rekombination der Moleküle der Verbrennungsgase in der Düse in Betracht gezogen wird. Als Brennstoffe werden Hydrazin und Salpetersäure vorausgesetzt.

Gleichungen werden abgeleitet zur Bestimmung der Konzentrationen im expandierenden Gemisch als Funktionen von Druck und Temperatur und zur Berechnung der Ausströmungsgeschwindigkeit bei vorgeschriebenem Druck im Verbrennungsraum.

Résumé. Il s'agit d'une théorie thermodynamique d'un moteur à réaction, comprenant l'influence de la récombinaison des molécules pendant l'expansion des gaz dans la tuyère de détente. Les combustibles sont hydrazine et acide nitrique. On dérive des équations pour déterminer les concentrations des composantes chimiques, dépendant de la pression et de la température, et ensuite pour déterminer la vitesse des gaz quittant la tuyère, la pression dans la chambre de combustion étant prescrite.

In space rocket designs very often hydrazine in combination with nitric acid are proposed as fuels. In comparison to liquid oxygen, nitric acid has the advantage that it does not boil at normal temperature and atmospheric pressure, whereas it contains a high percentage of oxygen for combustion. Also with the hydrazine-nitric acid combination, larger exhaust speeds can be obtained than with alcohol and liquid oxygen, and may be assumed to be about 3000 m/sec.

In this article we shall develop the thermodynamic theory of the rocket motor using the hydrazine-nitric acid combination, taking into account the dissociation during the expansion of the exhaust gases in the nozzle. We then have as fundamental chemical reaction equation:



¹ Breda/Holland, Franklin Roosevelt-laan 14.

Now let us assume *complete* combustion, so that only combustion products enter into the nozzle. These combustion products will then be partially dissociated by the high temperature, according to the reversible reactions:



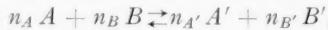
Hence the gas mixture in the nozzle contains the 10 components:

H_2O , OH , H_2 , H , O_2 , O , N_2 , N , NO_2 , and NO . Let us denote the quantities of kg molecules of these components per unit of volume by

(H_2O) , (OH) , (H_2) , (H) , (O_2) , (O) , (N_2) , (N) , (NO_2) , and (NO) ,

and let us call these quantities the *concentrations*. We then have to determine these concentrations as functions of the total pressure and the absolute temperature of the mixture. Therefore we shall use the so known *equilibrium constants*. For convenience of the reader, we shall firstly give a short exposition of these quantities.

Assume a reversible reaction between two substances A and B , by which two new substances A' and B' arise, according to the reaction equation:



in which n_A , n_B , $n_{A'}$ and $n_{B'}$ denote the numbers of molecules in the equation, coming into play. Indicating the concentrations by C_A , C_B , and $C_{A'}$, $C_{B'}$ respectively, we obtain as *reaction rate* in the sense $A, B \rightarrow A', B'$:

$$v = k C_A^{n_A} C_B^{n_B},$$

in which k is a constant. Similarly the reaction rate in the sense $A' B' \rightarrow A B$ becomes:

$$v' = k' C_{A'}^{n_{A'}} C_{B'}^{n_{B'}},$$

in which k' denotes another constant. In case of chemical equilibrium, $v = v'$, or:

$$k C_A^{n_A} C_B^{n_B} = k' C_{A'}^{n_{A'}} C_{B'}^{n_{B'}}.$$

Then the ratio:

$K_C = \frac{k}{k'} = \frac{C_{A'}^{n_{A'}} C_{B'}^{n_{B'}}}{C_A^{n_A} C_B^{n_B}}$ is called the *equilibrium constant* of the chemical reaction.

Now according to the thermodynamic theory:

$$K_C = K_{Cm} e^{-\frac{A}{R T}},$$

in which e is the base of the natural logarithm system and K_{Cm} and A are constants which can be determined empirically by spectroscopic methods. Further \bar{R} is the general gas constant in the wellknown equation

$$\phi V = \bar{R} T,$$

in which ϕ is the pressure, T the absolute temperature and V the volume of one kg molecule of the ideal gas into question. In kg. M. sec. units, $\bar{R} = 848$ for all gases. For the rest it may be observed that A is the so known *activation*

heat and is, as to the reactions (I), (II), ... (VII), the quantity of heat required for the complete dissociation of one kg molecule of the left member in the equation.

Let us assume that for any of these reactions the constants K_{Cm} and A are known. Then, as to any of these reactions, K_C is a known function of the temperature T only.

If we indicate the equilibrium constants corresponding with the reactions I, II, III, IV, V, VI, and VII by K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 , K_6 , and K_7 , we obtain the 7 relations:

$$K_1 = \frac{(H_2)^2 (O_2)}{(H_2 O)^2}, \quad (1) \quad K_2 = \frac{(OH)^2 (H_2)}{(H_2 O)^2}, \quad (2) \quad K_3 = \frac{(H)^2}{(H_2)}, \quad (3)$$

$$K_4 = \frac{(O)^2}{(O_2)}, \quad (4) \quad K_5 = \frac{(N)^2}{(N_2)}, \quad (5) \quad K_6 = \frac{(NO)^2 (O_2)}{(NO_2)^2}, \quad (6)$$

$$K_7 = \frac{(N)(O)}{(NO)}. \quad (7)$$

In order to determine the concentrations, three relations are still required. As to any one of the chemical components we have the relation:

$$\rho' V = \bar{R} T,$$

in which ρ' is the partial pressure of the component and V the volume of one kg molecule of this component. We can also write this relation:

$$\cdot \frac{1}{V} = c = \frac{\rho'}{\bar{R} T},$$

in which c denotes the concentration (number of kg molecules per unit of volume) of the component. Summarizing over all components of the mixture we then obtain:

$$\Sigma(c) = \frac{\Sigma\rho'}{\bar{R} T} = \frac{\rho}{\bar{R} T},$$

in which ρ denotes the total pressure of the mixture. Hence we obtain as eighth relation between the concentrations:

$$(H_2 O) + (OH) + (H_2) + (H) + (O_2) + (O) + (N_2) + (N) + (NO_2) + (NO) = \frac{\rho}{\bar{R} T}. \quad (8)$$

Two additional relations are obtained by observing that throughout all chemical transformations the ratios between the numbers of H and O atoms, and N and O atoms remain constant. These ratios are according to equation (A):

$$\frac{H}{O} = \frac{24}{12} = 2, \quad \text{and} \quad \frac{N}{O} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}.$$

Hence:

$$\frac{1}{2}(H_2 O) + (OH) + \frac{1}{2}(H_2) + (H) = 2 \left\{ (H_2 O) + (OH) + (NO) + \frac{(O_2) + (NO_2)}{2} + (O) \right\} \quad (9)$$

$$6 \left\{ \frac{1}{2}(N_2) + (N) + (NO_2) + (NO) \right\} = 7 \left\{ (H_2 O) + (OH) + (NO) + \frac{(O_2) + (NO_2)}{2} + (O) \right\} \quad (10)$$

By the relations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), and (10) the concentrations are determined as functions of the pressure p and the absolute temperature T of the mixture of combustion products, expanding in the nozzle.

The numerical solution of this system of 10 equations can be carried out as follows. Let us assume for the concentrations (H_2) and (O_2) certain values. Then further (H_2O) follows from (1), (OH) from (2), (H) from (3) and (O) from (4). Then we can write (6) and (9):

$$\frac{(NO)}{(NO_2)} = \sqrt{\frac{K_6}{(O_2)}} = P, \quad \frac{(NO_2)}{2} + (NO) = Q,$$

in which now P and Q are known quantities. Hence:

$$(NO_2) \left[\frac{1}{2} + P \right] = Q, \quad \text{so that} \quad (NO_2) = \frac{2Q}{1 + 2P},$$

and

$$(NO) = Q - \frac{Q}{1 + 2P}.$$

Then further (N) follows from (7) and (N_2) from (5). Now also the relations (8) and (10) must be satisfied. Let us write these equations on the right reduced to zero:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

If we now substitute in these equations the quantities of the concentrations found above, these equations will in general not be satisfied, because in general the values we have assumed for (H_2) and (O_2) will not be the right ones. Hence we may then write:

$$\alpha = F_1[(H_2), (O_2)] \quad (8')$$

$$\beta = F_2[(H_2), (O_2)] \quad (10')$$

in which F_1 and F_2 are to be conceived as functions of the estimated values of (H_2) and (O_2) . If we then plot (H_2) and (O_2) along the x axis and y axis of a rectangular three-dimensional axis system (see fig. 1) and α as well as β along

the z axis, we can [taking different sets of values for (H_2) and (O_2)] construct the surfaces (8') and (10').

The x and y coordinates of the point of intersection of the intersection curves of these surfaces with the x - y plane will then be equal to the right values of the concentrations (H_2) and (O_2) . The values of the other concentrations then follow from the procedure indicated above.

In order to compute the exhaust speed of the gases in the mouth of the nozzle, we have to determine the specific volume v of the expanding mixture as function of the pressure p . During the expansion in the nozzle, recombination of dissociated molecules occurs and the recombination heat released is supplied to the mixture. The way in which v varies as function of p during the expansion in the nozzle will be the same as if the mixture were enclosed in a vessel of which the volume increases.

Therefore let us consider a mixture of the same initial composition, with the same initial pressure and temperature in such an expanding closed vessel. If dQ be the quantity of heat supplied to the mixture by recombination during the expansion dv , we may write:

$$dQ = c_v dT + p dv,$$

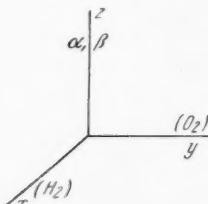


Fig. 1

in which c_v denotes the specific heat of the mixture at constant volume. If G_1, G_2, G_3 etc. are the weights of the different chemical components composing the mixture, and $c_{v_1}, c_{v_2}, c_{v_3}$ etc. the specific heats at constant volume of those components, this specific heat of the mixture becomes:

$$c_v = \frac{G_1 c_{v_1} + G_2 c_{v_2} + G_3 c_{v_3} + \dots}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots} \quad (11)$$

The quantities G_1, G_2, G_3 etc. are proportional with the concentrations, which are determined as functions of p and T by numerical solution of the equations (1), (2), ... (10) for different value sets of p and T . The quantities $c_{v_1}, c_{v_2}, c_{v_3}$ are pure functions of the absolute temperature T , and may be written:

$$c_{v_i} = a_i + \beta_i T + \gamma_i T^2 + \dots \quad (i = 1, 2, 3 \dots). \quad (12)$$

Let us assume the constants $a_i, \beta_i, \gamma_i \dots$ for all chemical components as known. Then by (11) and (12), c_v may be conceived as a known function of p and T , so that we may write:

$$dQ = c_v(p, T) dT + p dv.$$

Or:

$$\frac{dQ}{dT} = c_v(p, T) + p \frac{dv}{dT}. \quad (13)$$

In (13) we may consider T as the independent variable, so that we may write:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{dp}{dT} + \frac{\partial Q}{\partial T} = c_v(p, T) + p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \frac{dp}{dT} + \frac{\partial v}{\partial T} \right). \quad (14)$$

If $n_1, n_2, n_3 \dots$ be the numbers of kg molecules of the different chemical components in the mixture and $m_1, m_2, m_3 \dots$ the corresponding molecular weights, the total weight of the mixture becomes:

$$G = \sum_i G_i = n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \dots \quad (15)$$

Then we obtain as concentration for each component:

$$c_i = \frac{n_i}{v_{tot}}, \text{ if } v_{tot} = \text{total volume of the enclosed mixture.}$$

Hence:

$$\sum_i (c_i) = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}{v_{tot}} = \frac{p}{R T}.$$

Or by (15):

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}{v(n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \dots)} = \frac{p}{R T}. \quad (16)$$

In (16) the ratio:

$$m = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \quad (17)$$

is the average molecular weight of the mixture. Hence we may write (16):

$$v = \frac{1}{p} \bar{R} \frac{T}{m} = \bar{R} \frac{F(p, T)}{p}, \quad (18)$$

in which $F(p, T)$ may be considered as a known function of p and T , because the quantities n_1, n_2, n_3 are proportional with the concentrations. Then also the functions

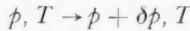
$$\frac{\partial v}{\partial p} = \bar{R} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{F(p, T)}{p} \right) = \bar{R} a(p, T) \quad (19)$$

and

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \bar{R} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F(p, T)}{p} \right) = \bar{R} \beta(p, T) \quad (20)$$

may be considered as known.

In order further to derive the function $\partial Q/\partial p$, let us consider a transition:



of the enclosed mixture. The corresponding increase of the concentration (H_2O) then becomes:

$$\frac{\partial}{\partial p} (H_2O) \delta p.$$

The corresponding increase of (H_2O) due to reaction (II) only becomes $-\partial/\partial p (OH) \delta p$, so that the increase of (H_2O) due to reaction (I) only is equal to

$$\frac{\partial}{\partial p} [(H_2O) + (OH)] \delta p.$$

Hence we obtain as quantity of recombination heat released per unit of volume by reaction (I) only:

$$U_1 \frac{\partial}{\partial p} [(H_2O) + (OH)] \delta p,$$

if U_1 denotes the recombination heat released by the formation of one kg molecule H_2O according to reaction (I). In connection with (18) the quantity of recombination heat released per unit of weight by reaction (I) only then becomes:

$$\bar{R} \frac{F(p, T)}{p} U_1 \frac{\partial}{\partial p} [(H_2O) + (OH)] \delta p.$$

Further we obtain as quantities of recombination heat released per unit of volume,

$$\text{by reaction (II) only: } -U_2 \frac{\partial}{\partial p} (OH) \delta p$$

$$\text{,, , (III) only: } -\frac{U_3}{2} \frac{\partial}{\partial p} (H) \delta p$$

$$\text{,, , (V) only: } +U_5 \frac{\partial}{\partial p} (N_2) \delta p$$

$$\text{,, , (VI) only: } +U_6 \frac{\partial}{\partial p} (NO_2) \delta p,$$

in which U_2, U_3, U_5 , and U_6 denote the quantities of recombination heat released by the formation of one kg molecule H_2O , H_2 , N_2 , and NO_2 according to the reactions II, III, V, and VI respectively.

Vol.
1
1955

Further the total increment of (NO) becomes $\frac{\partial}{\partial p} (NO) \delta p$. By reaction (VI) only, we have an increase of (NO) equal to

$$-\frac{\partial}{\partial p} (NO_2) \delta p.$$

Hence the increase of (NO) due to reaction (VII) only becomes:

$$\frac{\partial}{\partial p} [(NO) + (NO_2)] \delta p,$$

so that the quantity of recombination heat released per unit of volume by reaction (VII) only, becomes:

$$U_7 \frac{\partial}{\partial p} [(NO) + (NO_2)] \delta p,$$

if U_7 denotes the quantity of recombination heat released by the formation of one kg molecule NO according to reaction (VII).

The total increment of (O) becomes $\frac{\partial}{\partial p} (O) \delta p$. The increase of (O) according to reaction (VII) only is equal to the negative increment of (NO) according to reaction (VII) only, hence is according to the previous:

$$-\frac{\partial}{\partial p} [(NO) + (NO_2)] \delta p.$$

Thus the increment of (O) by reaction (IV) only becomes:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial p} (O) + \frac{\partial}{\partial p} [(NO) + (NO_2)] \right\} \delta p.$$

Hence the recombination heat released corresponding to reaction (IV) becomes per unit of volume:

$$-\frac{U_4}{2} \frac{\partial}{\partial p} [(O) + (NO) + (NO_2)] \delta p,$$

in which U_4 denotes the quantity of recombination heat released by formation of one kg molecule (O_2) according to reaction (IV).

The total quantity of recombination heat released per unit of weight equals $\frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \delta p$. Hence summarising the foregoing results we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} = & \bar{R} \frac{F(p, T)}{p} \left\{ U_1 \frac{\partial}{\partial p} [(H_2O) + (OH)] - U_2 \frac{\partial}{\partial p} (OH) - \frac{U_3}{2} \frac{\partial}{\partial p} (H) - \right. \\ & - \frac{U_4}{2} \frac{\partial}{\partial p} [(O) + (NO) + (NO_2)] + U_5 \frac{\partial}{\partial p} (N_2) + U_6 \frac{\partial}{\partial p} (NO_2) + \\ & \left. + U_7 \frac{\partial}{\partial p} [(NO) + (NO_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

and similarly:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial T} = & \bar{R} \frac{F(p, T)}{p} \left\{ U_1 \frac{\partial}{\partial T} [(H_2O) + (OH)] - U_2 \frac{\partial}{\partial T} (OH) - \frac{U_3}{2} \frac{\partial}{\partial T} (H) - \right. \\ & - \frac{U_4}{2} \frac{\partial}{\partial T} [(O) + (NO) + (NO_2)] + U_5 \frac{\partial}{\partial T} (N_2) + U_6 \frac{\partial}{\partial T} (NO_2) + \\ & \left. + U_7 \frac{\partial}{\partial T} [(NO) + (NO_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Now because the concentrations are found as functions of ϕ and T by the numerical solution of the equations (1), (2) . . . (10), also the derivatives of these concentrations as to T and ϕ may be conceived as known functions of ϕ and T . Hence by (21) and (22) we may write:

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi} = \xi(\phi, T), \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \eta(\phi, T), \quad (24)$$

in which ξ and η may be conceived as known functions of ϕ and T . Substituting (19), (20), (23), and (24) in (14) we obtain:

$$\xi(\phi, T) \frac{d\phi}{dT} + \eta(\phi, T) = c_v(\phi, T) + \bar{R}\phi \left\{ a(\phi, T) \frac{d\phi}{dT} + \beta(\phi, T) \right\}.$$

Or solving with respect to $d\phi/dT$, we then obtain:

$$\frac{d\phi}{dT} = \varphi(\phi, T), \quad (25)$$

in which φ may be considered as a known function of ϕ and T . The equation (25) can be integrated by steps according to the method of RUNGE and KUTTA, starting from the initial state $\phi_0 T_0$ at the entrance of the nozzle. We then obtain the scheme:

Small increment of T , $\rightarrow h$, corresponding increment of ϕ , $\rightarrow k$,

$$k = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4,$$

in which

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \varphi(\phi, T) h \\ k_2 &= \varphi \left(\phi + \frac{k_1}{2}, T + \frac{h}{2} \right) h \\ k_3 &= \varphi \left(\phi + \frac{k_2}{2}, T + \frac{h}{2} \right) h \\ k_4 &= \varphi(\phi + k_3, T + h) h. \end{aligned} \right\}$$

By repeating the computation for a certain interval of T with half the number of steps, each step being $2h$, and comparing the result with the result of the first computation, we can estimate the error corresponding with the first computation. $1/15$ of the difference in result of both computations will then be a measure of the order of magnitude of this error.

In this way we find for the expansion of the gases in the nozzle the function:

$$\phi = \phi(T). \quad (26)$$

Substituting (26) in (18), we then find:

$$v = v(T). \quad (27)$$

From (26) and (27) we further find:

$$v = v(\phi). \quad (28)$$

Assuming adiabatic expansion in the nozzle, the exhaust speed c of the expanding gases in the mouth of the nozzle is determined by:

$$\frac{c^2}{2g} = \int_{\phi}^{\phi_0} v(\phi) d\phi, \quad (29)$$

Vol.
1
1955

in which g denotes the acceleration due to gravity, p_0 the pressure of the gases in the combustion chamber and p the pressure in the mouth of the nozzle.

If F denotes the area of the nozzle mouth, F_x the area of the cross section at distance x from the nozzle entrance, c_x the gas speed and v_x the specific volume of the gas mixture at distance x , we have as equation of continuity:

$$\frac{F c}{v} = \frac{F_x c_x}{v_x},$$

so that:

$$F_x = F \frac{v_x(p_x)}{v(p)} \sqrt{\frac{\int_p^{p_0} v(p) dp}{\int_{p_x}^{p_0} v(p) dp}}, \quad (30)$$

in which p_x denotes the pressure in the section F_x . If the function $p_x = p_x(x)$ is prescribed as well as p_0 , p and the axial length l of the nozzle, the function

$$F_x = F_x(x),$$

and thereby the shape of the nozzle can be determined by means of (30).

In order to determine the temperature T_0 in the combustion-chamber, we assume that the combustion heat is supplied to the combustion gases, being originally a mixture of H_2O and N_2 . Let the combustion heat per unit of weight of the charge be E .

We assume that this combustion heat will be supplied to the mixture of combustion gases at constant pressure p_0 . By this supply of heat, dissociation occurs and the different other chemical components coming into play are generated. We then obtain:

$$E = \sum_i \int_0^{G_i} dG_i \left[\int_{T(G_i)}^{T_0} c_{v_i} dT + R_i(T_0 - T(G_i)) \right], \quad (31)$$

in which the summation must be taken over all chemical components of the mixture and $T(G)$ be the absolute temperature corresponding with the increment $G \rightarrow G + dG$ of the chemical component in question during the supply of heat. As to c_{v_i} the relation (12) as to any component must be substituted. The constant R_i is the gas constant as to any component. By numerical solution of the system (1), (2) ... (10) we know the concentrations at any temperature T and the prescribed pressure p_0 , so that for a certain value of T_0 we can compute numerically the corresponding value of E by means of (31). In this way we then find numerically the value of T_0 , providing the known value of the combustion heat E .

Further the mass quantity expelled per unit of time becomes:

$$\frac{c F}{g v(p)} = \frac{F}{g v(p)} \sqrt{2 g \int_p^{p_0} v(p) dp} = \frac{\sqrt{2} F}{g v(p)} \int_p^{p_0} v dp. \quad (32)$$

Hence the turbo fuel pump system must be designed in such a way that this mass quantity is supplied per unit of time to the combustion chamber.

Über eine simultane analytische Integration der Bewegungsgleichungen eines geflügelten Gerätes im Überschallgleitflug

Von

H. J. Kauppeler, Stuttgart¹, ARS, BIS, GfW

(Eingelangt am 10. Juli 1955)

Zusammenfassung. Unter den beiden Annahmen, daß der Bahnneigungswinkel und die Gleitzahl eines geflügelten Körpers in einer antriebslosen, nicht zusätzlich verzögerten Überschallgleitbahn zumindest in einem betrachteten Bereich konstant seien, wird das simultane Differentialgleichungssystem für eine solche Bewegung analytisch integriert. Berücksichtigt sind beliebige atmosphärische Daten und Veränderlichkeit des Erdschwefeldes mit der Höhe. Analytische Beziehungen sind angegeben für den Verlauf der Geschwindigkeit mit der jeweiligen Flughöhe, sowie für den Zeitverlauf in der Bahn.

Abstract. It is assumed that the angle of inclination of the trajectory tangent and the lift-to-drag ratio remain constant within at least part of the trajectory under consideration. Under these assumptions, the simultaneous differential equations of motion of a winged vehicle in non-powered supersonic glide are integrated analytically. Arbitrary atmospheric data and the variation of gravity with altitude are considered in this paper. Analytical relations are given for the calculation of velocity variation with altitude and time dependence on the motion in the trajectory.

Résumé. On considère un engin empenné en vol supersonique, moteurs arrêtés, et sans traînée retardatrice supplémentaire. Admettant que dans l'intervalle considéré l'angle d'assiette et la finesse demeurent constants, le système des équations différentielles simultanées d'un tel mouvement est intégré analytiquement. Les données atmosphériques demeurent arbitraires et la variation de la pesanteur avec l'altitude est prise en considération. Des expressions analytiques sont données pour la vitesse comme fonction de l'altitude et pour les éléments de la trajectoire comme fonctions du temps.

In einer früheren Arbeit [1] wurde der Versuch gemacht, eine analytische Integration der Bewegungsgleichungen eines geflügelten Körpers in einer Überschallgleitbahn durchzuführen. Die Integration gelang unter der Annahme, daß der Bahnneigungswinkel konstant sei und für die Schwerbeschleunigung ein Mittelwert eingeführt werden könne. Für die Variation des Luftwiderstandsbeiwertes mit der Geschwindigkeit (bzw. MACH-Zahl) wurde ein geeignetes analytisches Gesetz eingeführt, für die Variation der Luftdichte mit der Höhe wurde die bekannte exponentielle Dichteabnahme zugrunde gelegt. Das Ziel dieser Arbeit war die Ermittlung analytischer Beziehungen zur Berechnung ausgezeichneter Daten einer Überschallgleitbahn, insbesondere der auftretenden Maxima von Luftwiderstandsverzögerung und Hauttemperatur infolge aerodynamischer Erwärmung. In einer weiteren Arbeit des Verfassers [2] wurden diese Beziehungen

¹ Forschungsinstitut für Physik der Strahltriebe e. V., Stuttgart-Flughafen.

verwendet, um analytische Formeln zur Ermittlung der Änderung dieser beiden charakteristischen Maxima infolge einer Variation der Gerätedaten abzuleiten.

Der Nachteil der dort durchgeföhrten Integration war, daß der Auftrieb in der Bahn nur näherungsweise berücksichtigt werden konnte, das heißt mit den gemachten Annahmen ließ sich keine simultane Integration der Gleichung für die Tangentialbeschleunigung und die Normalbeschleunigung durchführen. Die erste Bewegungsgleichung konnte analytisch integriert werden, während die zweite zur Bestimmung der Anfangs- und Enddaten der Gleitbahn herangezogen wurde. Im nachfolgenden soll nun gezeigt werden, wie diese beiden Bewegungsgleichungen simultan analytisch integriert werden können.

Die Bewegungsgleichungen eines Körpers in einem Zentralkraftfeld und unter dem Einfluß eines resistenten Mediums (Atmosphäre) in bahnfesten Koordinaten lauten in ihrer allgemeinsten Form

$$\begin{aligned}\dot{v} &= dv/dt = \frac{P}{m} \cos a - \frac{D}{m} - \frac{R}{m} \sin a - g \cos \vartheta, \\ -v \dot{\vartheta} &= \frac{P}{m} \sin a + \frac{R}{m} \cos a + \frac{L}{m} - g \sin \vartheta (1 - v^2/g r).\end{aligned}$$

Hier bedeuten v die jeweilige Geschwindigkeit, t die Zeit, r den Radiusvektor (Abstand vom Erdmittelpunkt, Höhe über der gekrümmten Erdoberfläche $y = r - r_0$), ϑ den Bahnneigungswinkel (gezählt vom Radiusvektor gegen die Bahntangente, positiv im Uhrzeigersinn), a den Anstellwinkel (gezählt von der Bahntangente gegen die Raketenlängssachse, positiv entgegen dem Uhrzeigersinn), P einen eventuellen Schub, R die Ruderkraft, D den Luftwiderstand, L den Auftrieb, g die veränderliche Schwerebeschleunigung und m die Masse des Fahrzeuges. Für den vorliegenden Fall soll keine Bremskraft durch einen negativen Schub, ebenfalls kein Vortrieb durch Schub auftreten, also $P = 0$. Die Ruderkraft ist im allgemeinen sehr klein und kann deshalb vernachlässigt werden, also $R = 0$. Damit erübrigts sich das Aufstellen von Momentengleichungen.

Die zu integrierenden Bewegungsgleichungen lauten daher für den vorliegenden Fall:

$$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g \cos \vartheta, \quad g = g_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (1)$$

$$-v \dot{\vartheta} = \frac{L}{m} - g \sin \vartheta (1 - K), \quad K = v^2 r / g_0 r_0^2 \quad (2)$$

mit g_0 = Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche und r_0 = Erdradius. Um dieses simultane Gleichungssystem analytisch integrieren zu können, wird angenommen, daß Bahnneigungswinkel und Gleitzahl im betrachteten Bahnstück konstant bleiben sollen, also

$$\vartheta = \text{const.}, \quad d\vartheta/dt = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon = D/L = \text{const.}, \quad \text{Gleitzahl} = 1/\varepsilon, \quad (4)$$

wobei ein positiver Anstellwinkel gefordert werden muß, also $a > 0$. Die Annahme in Gl. (4) bedeutet aerodynamisch, daß für den Fall der ebenen Platte (als Tragflügel) in Überschallströmung der Anstellwinkel konstant bleibt. Zusammen mit der Forderung Gl. (3) würde dies bedeuten, daß der Aggregatwinkel $\varphi = \vartheta - a$ konstant bleibt, ein Fall, der wegen seiner flugtechnischen Einfachheit interessant ist. Infolge der Annahme (3) folgt aus Gl. (2)

$$\frac{L}{m} - g \sin \vartheta (1 - K) = 0,$$

und wenn noch die Annahme (4) hinzugenommen wird, folgt hieraus für die Verzögerung infolge Luftwiderstandes

$$-\frac{D}{m} = -g \varepsilon \sin \vartheta (1 - K). \quad (5)$$

Substituiert man Gl. (5) in (1), so folgt

$$dv/dt = g \varepsilon \sin \vartheta \cdot K - g \cos \vartheta (\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1).$$

Wegen $dr/dt = v \cos \vartheta$ folgt $dv/dt = 1/2 \cdot \cos \vartheta \cdot d(v^2)/dr$, und damit

$$\frac{r^2}{g_0 r_0^2 \cos \vartheta} \frac{d}{dt} \frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{g_0 r_0^2} \frac{d(v^2)}{dr} = r \frac{dK}{dr} - K = 2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta \cdot K - 2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1),$$

oder, mit den Abkürzungen

$$\beta = 2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1), \quad \delta = \frac{2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1}{2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1)}, \quad \beta \delta = \sigma = 2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1, \quad (6)$$

folgt

$$\frac{dK}{\delta K - 1} = \beta \frac{dr}{r}, \quad (7)$$

mit der Lösung

$$\frac{1}{\delta} \ln(\delta K - 1) = \beta \ln r + \text{Const.};$$

oder, wenn man für einen Anfangswert r_i einen Wert K_i zuordnet, ist

$$K = \frac{v^2 r}{g_0 r_0^2} = \frac{1}{\delta} (C r^\sigma + 1) = \frac{1}{\delta} \left[(\delta K_i - 1) \left(\frac{r}{r_i} \right)^\sigma + 1 \right], \quad (8)$$

$$C = (\delta K_i - 1) / r_i^\sigma,$$

und damit

$$v^2 = \frac{g_0 r_0^2}{r} \frac{2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1)}{2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1} \left[\left(\frac{2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1}{2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1)} \frac{v_i^2 r_i}{g_0 r_0^2} - 1 \right) \left(\frac{r}{r_i} \right)^{2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1} + 1 \right]. \quad (8a)$$

Damit hat man bereits den Verlauf der jeweiligen Geschwindigkeit mit der Höhe. Die Anfangswerte werden aus der zweiten Bewegungsgleichung, Gl. (2), in derselben Art und Weise ermittelt, wie dies in der früheren Arbeit [1] durchgeführt wurde. Von Interesse sind noch die Zusammenhänge

$$\delta = \sigma/(\sigma + 1) \quad (9)$$

und

$$\frac{r_e}{r_i} = \left(\frac{\frac{\sigma}{\sigma + 1} K_e - 1}{\frac{\sigma}{\sigma + 1} K_i - 1} \right)^{1/\sigma}, \quad (10)$$

wobei man Gl. (10) geeigneterweise zur graphischen Bestimmung von $\sigma = \sigma(\varepsilon, \vartheta)$ verwendet, wenn die Anfangsdaten der Bahn (K_i, r_i) und die Enddaten (K_e, r_e) vorgegeben sind.

Zunächst sollen nun die einzelnen auftretenden Größen von Gl. (8) näher diskutiert werden. Es ist bekannt, daß K ganz allgemein variiert zwischen den Grenzen $0 \leq K \leq 2$. Ferner ist ersichtlich, daß $\delta > 0$ für $|\sigma| > 1$. In den meisten Fällen ist $\operatorname{tg} \vartheta < 0$, und zwar $|\operatorname{tg} \vartheta| \gg 1$, so daß

$$\delta = \frac{2 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1}{2(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1)} = \frac{\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1/2}{\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta + 1} < 1, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} \leq \delta \leq 1.$$

VOL
1
1955

Damit kann nun die Variation der Größe $C r^\sigma$ untersucht werden. Zunächst ist aber noch zu beachten, daß für die Gleitbahn $a > 0$ wegen Gl. (4) zu fordern ist. Damit folgt aber $0 \leq K \leq 1$, und ferner $0 \leq \delta K \leq 1$, das heißt $-1 \leq (\delta K - 1) \leq 0$. Aus Gl. (8) folgt nun sofort

$$-1 \leq C r^\sigma = (\delta K_i - 1) \left(\frac{r}{r_i} \right)^\sigma \leq \delta - 1 \leq 0.$$

Es dürfte also erlaubt sein, den Ausdruck $(1 + C r^\sigma)^n$ in eine binomische Reihe zu entwickeln. Der Fall $K = 1$ ist ebenfalls auszuschließen, da für ihn gleichzeitig $\tan \vartheta = \pm \infty$ gilt (Fall einer Kreisbahn). Die eigentliche Gleitbahn beginnt mit $K < 1$, also $\delta K < 1$. Damit wird der Ausdruck $(\delta K_i - 1)$ in Gl. (8) negativ. Wegen $\sigma < 0$ wächst der absolute Wert des Ausdrucks $(\delta K_i - 1) (r/r_i)^\sigma$ mit fallendem r , so daß der eigentliche Wert von $[(\delta K_i - 1) (r/r_i)^\sigma + 1]$ in Gl. (8) mit abnehmendem r ebenfalls abnimmt.

Nun wäre noch der Zeitverlauf der Bewegung in der Überschallgleitbahn zu ermitteln. Man hat $\dot{r} = v(r) \cos \vartheta$, also $dt = dr/v \cos \vartheta$. Wegen $v = r_0 \sqrt{g_0} \cdot \sqrt{(K/r)}$ folgt mit Hilfe von Gl. (8),

$$dt = \frac{dr}{v \cos \vartheta} = \frac{\sqrt{\delta}}{r_0 \cos \vartheta \sqrt{g_0}} r^{1/2} (1 + C r^\sigma)^{-1/2},$$

und damit, wenn $(1 + C r^\sigma)^{-1/2}$ in eine Reihe entwickelt und für C der entsprechende Ausdruck eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{\delta} r_i^{3/2}}{r_0 \cos \vartheta \sqrt{g_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (\delta K_i - 1)^n \int \left(\frac{r}{r_i} \right)^{\sigma n + 1/2} d \left(\frac{r}{r_i} \right) + \text{Const.} = \\ &= \frac{\sqrt{\delta} r_i^{3/2}}{r_0 \cos \vartheta \sqrt{g_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (\delta K_i - 1)^n \frac{(r/r_i)^{\sigma n + 3/2}}{\sigma n + 3/2} + \text{Const.} \quad (11) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante wird aus der Anfangsbedingung

$$t_i = 0 = \frac{\sqrt{\delta} r_i^{3/2}}{r_0 \cos \vartheta \sqrt{g_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(\delta K_i - 1)^n}{\sigma n + 3/2} + \text{Const.}$$

ermittelt. Ferner hat man noch

$$\frac{\sqrt{\delta} r_i^{3/2}}{r_0 \cos \vartheta \sqrt{g_0}} = \frac{r_i \sqrt{(\delta K_i)}}{v_i \cos \vartheta}.$$

Damit folgt schließlich für den Zeitverlauf der Bewegung

$$t = \frac{r_i \sqrt{(\delta K_i)}}{v_i \cos \vartheta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (\delta K_i - 1)^n \frac{(r/r_i)^{\sigma n + 3/2}}{\sigma n + 3/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(\delta K_i - 1)^n}{\sigma n + 3/2} \right]. \quad (12)$$

Damit wären nun analytische Formeln für die wichtigsten Bahndaten angegeben. Die Flugweite über der gekrümmten Erdoberfläche folgt aus derselben Formel, die bereits in der alten Arbeit [1] angegeben wurde,

$$X = r_0 \tan \vartheta \cdot \ln \frac{r}{r_i}.$$

In der Behandlung von Gleitbahnen, die sich an eine Rückkehrbahn von einer Außenstation um die Erde zur Erdoberfläche anschließen, kann zunächst das Bahnstück mit $K > 1$ vor der eigentlichen Gleitbahn mit Hilfe der in der früheren

Arbeit [1] angegebenen Formeln für die erzwungene Gleitbahn ($r = \text{const.}$), wo die Bewegungsgleichungen auch simultan integriert werden konnten, berechnet werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit Hilfe der hier angegebenen Formeln in relativ kurzer Zeit und mit verhältnismäßig wenig Rechenaufwand Beispiele für Überschallgleitbahnen mit konstantem Bahnneigungswinkel und näherungsweise auch für konstanten Aggregatwinkel durchgerechnet werden können. Dies dürfte besonders für den Projektingenieur und den Konstrukteur von Rückkehrgeräten und Überschallgleitern von Interesse sein. Ferner bilden diese hier angegebenen analytischen Beziehungen eine Grundlage für eine erweiterte Untersuchung aerodynamischer und thermo-aerodynamischer Fragen, wie sie bereits in der früheren Arbeit [1] aufgegriffen wurde.

Literaturverzeichnis

1. H. J. KÄPPELER und M. E. KÜBLER, Die Rückkehr von geflügelten Geräten von Außenstationsbahnen. In: Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß, S. 120. Wien-Innsbruck: Springer, 1955.
2. H. J. KÄPPELER, Über den Einfluß einer Variation der Gerätedaten, insbesondere der Flügelfläche, auf die maximale Verzögerung und Hauttemperatur von Rückkehrgeräten. Z. Flugwiss. 1955 (im Druck).

Vol
1
1955

Studies of a Minimum Orbital Unmanned Satellite of the Earth (MOUSE)¹

Part I. Geophysical and Astrophysical Applications²

By

S. F. Singer, College Park/Md.³, ARS

(With 3 Figures)

(Received August 29, 1955)

Editor's Note. The announcement by President EISENHOWER on July 29, 1955 about the launching of minimum satellites by the United States during the International Geophysical Year 1957—58 has made the present article quite topical.

While it is too early to speculate about the details of the U.S. satellite program, the announced dimensions, payloads and applications resemble very much those of a MOUSE satellite. It will be remembered that in 1954 the International Scientific Radio Union (URSI) in the Hague and the International Union of Geodesy and Geophysics (UGGI) in Rome both endorsed resolutions proposed by Professor SINGER to apply artificial satellites to geophysical and astrophysical research.

Abstract. A MOUSE would provide a far-reaching extension of present high altitude rockets in the study of the upper atmosphere and extraterrestrial radiations. Lifetimes of even a few days and payloads as low as 50 pounds would be adequate to allow continuous observations of the *solar ultraviolet* and *X-radiations* which have a profound influence on the ionosphere and therefore on radio communications. The cause of *magnetic storms* and *aurorae* could be established with more certainty. Observations of *cosmic rays* would help clear up the question of their origin. Various other astrophysical phenomena, such as *micrometeorites*, could be brought under direct observation. Measurement of the *earth's albedo* (reflected sunlight) would give a measure of total world cloud coverage which could be used to predict long term climatic changes. Radio transmissions from MOUSE would send back all data and allow at the same time a study of the *ionosphere*. The change in the orbit and the lifetime would give information on drag and therefore *upper atmosphere densities*, while observation of a luminous trail of sodium emitted from the satellite would allow studies of *winds, temperature, and turbulence* in the outermost layers of the earth's atmosphere.

¹ Presented in this form at the 25th Anniversary Spring Meeting of the American Rocket Society, Baltimore, Maryland, April 20, 1955. The substance of this paper was first presented at the Fourth Congress of the I.A.F., Zürich, 1953.

² Part II "Orbits and Lifetimes of Minimum Satellites" was presented as a paper at the New York meeting of the American Rocket Society, Dec. 1954.

³ Associate Professor, Department of Physics, College Park, Maryland, U.S.A.

The technical problems connected with the launching, control and instrumentation of the MOUSE satellite are well within the range of present techniques. It is likely that even smaller satellites will be constructed first to carry out portions of the research program described above.

Zusammenfassung. Eine MOUSE würde eine sehr bedeutende Ausweitung der gegenwärtigen Anwendung von Höhenraketen auf das Studium der hohen Atmosphäre und der außerirdischen Strahlungen ermöglichen. Eine „Lebensdauer“ von auch nur wenigen Tagen sowie Nutzlasten von nur 50 Pfund wären ausreichend für die Ermöglichung ununterbrochener Beobachtung der *Sonnenstrahlung im UV- und im Röntgen-Wellenlängengebiet*, die einen bestimmenden Einfluß auf die Ionosphäre und damit auf den Radioverkehr hat. Die Ursache der *magnetischen Stürme* und der *Polarlichter (Aurorae)* könnte mit größerer Gewißheit ermittelt werden. Beobachtungen der *kosmischen Strahlung* würden zur Aufklärung der Frage ihres Ursprungs beitragen. Verschiedene andere astrophysikalische Phänomene wie *Mikrometeoriten* könnten direkter Beobachtung unterworfen werden. Die Messung der *Erd-Albedo* (des von der Erde zurückgeworfenen Sonnenlichtes) gäbe ein Maß der Gesamt wolkendecke des Erdplaneten, wodurch die Voraussage langfristiger klimatischer Änderungen gefördert würde. Von der MOUSE ausgestrahlte Radiosendungen könnten alle Meßresultate übertragen und gleichzeitig ein Studium der *Ionosphäre* gestatten. Die Änderungen der Bahn und die Lebensdauer der MOUSE wären eine Informationsquelle über den Widerstand und infolgedessen über die *Dichten der oberen Atmosphäre*, während sich aus der Beobachtung eines leuchtenden Schweifes von aus dem Satelliten emittiertem Natrium die Möglichkeit zu Studien über *Winde, Temperaturen und Turbulenzerscheinungen* in den äußersten Schichten der Erdatmosphäre ergäbe.

Die mit Start, Überwachung und instrumenteller Ausrüstung des MOUSE-Satelliten zusammenhängenden technischen Probleme liegen durchaus im Verwirklichungsbereich der heutigen menschlichen Technik. Wahrscheinlich wird man anfangs sogar noch kleinere Satelliten bauen, um Teile des hier skizzierten Forschungsprogrammes auszuführen.

Résumé. Une avance considérable dans l'étude de la haute atmosphère et des radiations extra-terrestres par fusées de haute altitude pourrait être obtenue par l'utilisation d'un satellite du type "MOUSE". Une durée de vie de quelques jours seulement et une charge utile ne dépassant pas 50 livres seraient suffisantes pour l'observation continue du *rayonnement X et ultraviolet du soleil*, dont l'influence sur l'ionosphère est importante pour les communications par radio. La cause des *orages magnétiques* et des *aurores boréales* pourrait être établie avec plus de certitude. L'observation des *rayons cosmiques* permettrait de clarifier le problème de leur origine. D'autres objets astrophysiques, tels les *micrométéorites*, pourraient être soumis à l'observation directe. La mesure de *l'albedo terrestre* pourrait fournir une estimation de la quantité totale de formations nuageuses, utilisable pour la prédition des changements climatiques à longue échéance. Les signaux de T.S.F. émis par "MOUSE" transmettraient les résultats d'observation en même temps qu'ils permettraient l'étude de *l'ionosphère*. Les modifications d'orbite et la durée de vie fourniraient des renseignements sur la traînée et par conséquent sur les *densités atmosphériques à haute altitude*, cependant que l'observation d'une traînée lumineuse de sodium, émise par le satellite, permettrait l'étude des *vents, de la température et de la turbulence* dans les couches supérieures de l'atmosphère.

Les problèmes techniques posés par le lancement, le contrôle et l'instrumentation d'un tel satellite rentrent dans les possibilités actuelles de la technique.

Introduction

It is the purpose of the present paper to present a strong justification for the establishment of a minimum artificial satellite of the earth in terms of the advances it would lead to in our knowledge of the earth's outer atmosphere, of extra-terrestrial radiations and their influences on the earth. It is my belief that only after a justification has been clearly stated and the problems delineated which the

satellite would solve for us, does it become possible to deal with the technical problems in an intelligent manner; for example, the questions of optimum altitude of the satellite or of the precision of the orbit or of the necessary lifetime for a satellite cannot really be answered unless the purpose of the satellite is kept clearly in mind.

We will discuss here only the geophysical and astrophysical applications of a *minimum* satellite; i.e., a satellite weighing no more than perhaps fifty pounds, containing a radio transmitter and simple instruments to measure properties of the earth's atmosphere and of the extraterrestrial radiations. This does not mean that a larger satellite carrying more elaborate equipment, such as television cameras, spectrographs, or telescopes with pointing controls, would not be more useful. However, the larger satellite vehicle seems far removed from the standpoint of feasibility. To talk about its obvious usefulness would not add to the very real task of defining the usefulness of a satellite small enough so that it can be constructed and launched within the framework of available techniques. Hence we shall resist the temptation to discuss more elaborate instrumentations and consider only the very simplest types of observations which could be performed by instruments placed in a minimum vehicle above the earth's atmosphere.

Instruments vs. Propulsion

The main tasks would seem to be to decide on what is important to measure, to choose the fields in which crude observations could add appreciable knowledge to our store of information about outer space, and finally to design instruments which can without great refinement yield worthwhile and important data.

One can then investigate how the requirements of such a satellite research program affect the propulsion and guidance necessary to place the vehicle in its orbit. It is obvious that in order to be practical, this cannot be a one-way channel, but rather the propulsion engineer may say to the astrophysicist: "This is as much as we can do, so many pounds of payload, now see what you can do with that." It is necessary, therefore, to place oneself somewhere in the middle, keeping both ears open, one towards propulsion and the other towards the scientific instrumentation and to allow continuously for modifications on both sides in order to produce an end product which will be both *useful* and *feasible*.

This indeed is the heart of the compromise. It is relatively easy to produce a satellite which may be nothing more than a tiny metal slug, but it is hard to justify it on the basis of geophysical usefulness if it cannot be easily observed. On the other hand, an ambitious satellite with elaborate instruments may exceed the limitations set down by the rocket engineer. So, in order to be practical, and this paper will be concerned with a practical approach, a satellite proposal has to be both *feasible* and *worthwhile*.

We will arrange this paper into two parts: The first part will deal with a detailed discussion of the most useful investigations, and their scientific and economic implications. The second part will deal with some of the technical questions pertaining to a satellite, discussed in the light of the above investigations. These technical questions relate primarily to the weight of the satellite, to its physical dimensions, to the structural materials (in particular the skin), to the method of data recovery, to the choice of orbit, to the optimum launching altitude, to the necessary launching accuracy in speed and angle and the resulting precision of the orbit, and to the "lifetime" of the satellite¹.

¹ This novel concept relates to the duration of the satellite orbit and is discussed in Part II.

Basic Reasons for Upper Atmosphere Investigations

In order to study the largest part of extraterrestrial radiations, either electromagnetic or corpuscular, it is necessary to be above the appreciable¹ atmosphere since the radiation on encountering the atmosphere is modified or absorbed. Certain of the radiations, e.g., ultraviolet from the sun, are of great importance for the behavior of the atmosphere, but in every case a study of the incoming radiations reveals much about processes in outer space which could not be determined from sea level or even balloon observations. If we examine the transmission of the atmosphere to electromagnetic radiations[1], we find only two major "windows", one in the visible region from 2900 Å to about 7000 Å, the other in the radio region (Fig. 1). Beyond 7000 Å in the infrared there are

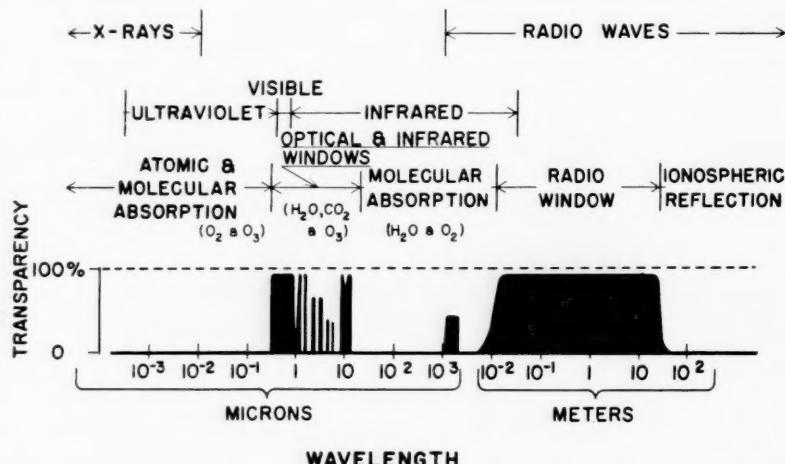


Fig. 1. Transparency of earth's atmosphere for electromagnetic radiations

many absorption bands due to the presence of water vapor, carbon dioxide, and ozone. Occasionally there are "windows" in the atmosphere through which one can see small portions of the infrared spectrum of the sun[2]. A particular prominent window is in the neighborhood of ten microns. It is only when one reaches wave lengths of the order of millimeters, in the microwave region, that the atmosphere again becomes transparent. But when the wave length increases up to a few meters the waves are again prevented from coming to sea level, this time not by absorption, but by reflection from the ionized layers in the upper atmosphere[1]. Going from the optical window towards shorter wave lengths one finds ozone and oxygen to be effective absorbers of ultraviolet radiation. It is only recently that rocket flights above 70 miles have given direct evidence of solar radiation in the far ultraviolet and in the X-ray region.

The situation is even worse with regard to corpuscular radiation. Fig. 2 shows that even the highly energetic ($> 10^9$ ev) cosmic ray primary particles (made up of protons and nuclei of heavier atoms) cannot penetrate far into the atmosphere without undergoing collisions with air nuclei. Only the cosmic ray secondaries produced in these collisions can reach the lower atmosphere[3]. Auroral particles,

¹ Where "appreciable" denotes an altitude appropriate to the type of radiation under study, e.g., ~ 25 miles for cosmic rays, ~ 65 miles for solar ultraviolet.

which are responsible for the northern lights, may contain protons of energy 100 times lower than the lowest cosmic ray energies; they are easily stopped in the upper atmosphere as they give up their energy to excite the auroral glow [4]; strangely enough particles of energy intermediate to cosmic rays and auroral particles are often absent [5]. Particles of even lower velocity (about 3000 km/sec) are extremely difficult to detect if they arrive singly. If they are charged, they will be turned away by the earth's magnetic field, long before they come close to the atmosphere. If, however, they arrive in sufficiently large numbers, in the form of corpuscular streams, instead of singly, then their reaction on the magnetic field is noticeable and may even lead to measurable variations of the earth's field [6].

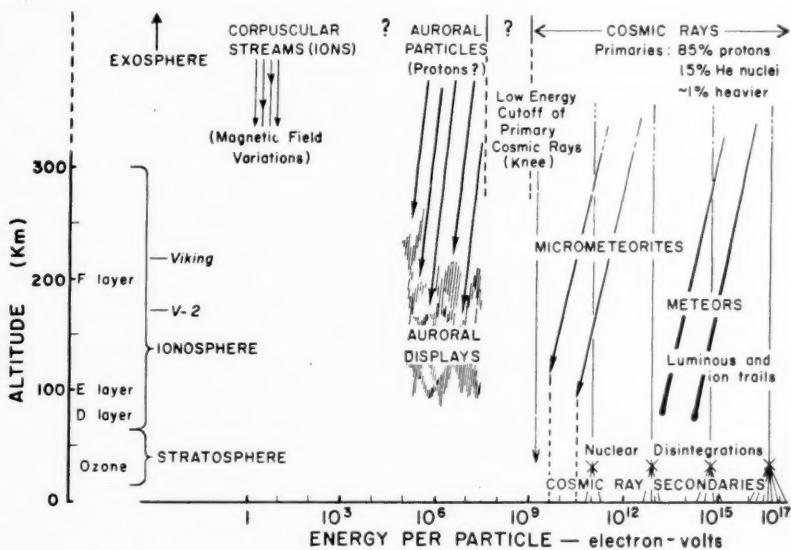


Fig. 2. Penetration of particles into the atmosphere

A third category includes material bodies: interplanetary dust particles, micrometeorites, meteors and meteorites. The last two categories can, of course, be detected from the ground, the meteors by their luminous and ionization trails. If they are extremely small (of the order of a few microns), they may not produce these trails. They could, however, be observed in impacts with detectors placed above the atmosphere [7].

Satellite Observations

Since 1946 upper atmosphere experiments have been carried on in V-2, Aerobee, and Viking high altitude sounding rockets and have furnished a great deal of scientific knowledge about the high atmosphere and solar and cosmic radiations [8]. In a critical study of the rocket program one is left with the feeling that much could be gained in certain fields by more frequent or even continuous observations as against occasional rocket measurements at one location of the earth. Out of such a study emerges a consistent research program for a satellite, consistent in the sense that it will supplement the information which has been

derived from high altitude rocket experiments by expanding the time and geographical scale of certain observations. Rocket experiments, because of their greater payloads, can delve more closely into detailed investigations of upper atmosphere phenomena and radiations from outer space.

Electromagnetic Radiations

Probably the most important subject for study from a platform above the atmosphere is the ultraviolet radiation from the sun. The interesting radiations extend all the way into the soft X-ray region with wave lengths of only a few Angström units. The portion of the radiation extending from 2900 Å to 2200 Å is stopped by the ozone (O_3) of the middle atmosphere (about 30 miles). Wavelengths shorter than 2200 Å must be observed at altitudes of over 65 miles since the absorption of the residual oxygen in the atmosphere is strong enough to eliminate all traces of this radiation at lower altitudes [1].

A characteristic feature of the solar radiation in the UV region is its great variability; although the sun appears to be emitting steadily in the visible, in the ultraviolet it behaves very much as a variable star. Since the ultraviolet radiation has such profound effects on the earth's upper atmosphere (it produces the radio reflecting layers of the ionosphere and the ozone layer) and since it initiates many photochemical reactions in the upper atmosphere, it is of the utmost importance to keep track of the ultraviolet radiation. Of particular interest is the LYMAN-alpha line of hydrogen at 1216 Å where a large part of the ultraviolet energy of the sun is concentrated. It is suspected that the intensity of the line can vary considerably depending on the amount of solar activity [9]. During periods of solar activity large amounts of energy seem to be released in the solar atmosphere and can be observed as sudden brightenings ("flares") on the solar surface in the vicinity of sun spots. These brightenings cover only a minute fraction of the solar disc and are detectable only in light filtered in the red line of atomic hydrogen (H α line 6563 Å). During these solar flares gaseous material is ejected from the sun into interplanetary space and large amounts of electromagnetic radiation are also emitted. We cannot observe at sea level anything but the visible. There is good evidence, however, for the increased emission of UV through observations of the ionosphere. Large solar flares can produce so-called radio fadeouts which are indicated by the disappearance of reflected radio signals. The fadeouts are caused by excess ionization in the lower *D* layer of the ionosphere, this excess ionization being produced by a large increase in the UV emission from various levels of the sun's atmosphere. The outermost level, the tenuous corona, emits X-radiations which are similarly enhanced during solar flares. The exact amounts are not known and their variability is quite unknown. Probably, therefore, the most important application of a satellite would be to the study of the LYMAN-alpha radiation and the X-radiation of the sun, and of their intensity variation with time during different periods of solar activity. A study of the relationship, during solar flares, of the large increases among the different regions of the solar spectrum may give us valuable information about the manner in which the energy is transferred from the surface of the sun into the sun's outer atmosphere 10,000 miles up. It is suspected that the corona is heated either by magneto-hydrodynamic shock waves or by particle streams, thus causing the high temperatures which are deduced from coronal emission lines observed in the visible. From the travel time of the disturbance we may be able to learn more about the actual mechanism by which the energy is transported in the solar atmosphere.

The economic implications of these studies are quite considerable, particularly if correlated directly with ionospheric observations. The study of the ionosphere has become a vast undertaking carried on by the laboratories of many governments on an international basis in order to derive fundamental information about the radio reflecting layers. The knowledge derived can be applied in a practical way to give predictions necessary for effective radio communication. At the present time this study is handicapped by our very imperfect knowledge about the solar radiations which produce these layers. Although there can be a wide range of argument about which types of satellite observations would be the most useful, it is safe to say that the studies of the solar radiation described above would rank very high.

The instruments for observing solar ultraviolet and X-radiation can be photon geiger-counters or photo sensitive surfaces with appropriate filters, similar to techniques which are now being used in high altitude rockets [8]. It is essential, however, to be able to point the instruments roughly towards the sun, to have them reasonably omnidirectional in case of misorientation, and to be able to observe the sun over as large a fraction of the orbit as possible.

Aside from the UV region, measurements of electromagnetic radiation can also be carried on in the infrared. Here the techniques become more difficult, also the results become less important from the fundamental point of view of solar physics and from the applied point of view of atmospheric effects. Furthermore, the variability in the infrared should be low; therefore, occasional rather than continuous observation may provide the necessary answers. Finally, it is possible to get a great deal of information on the solar infrared from balloon observations above the appreciable water-vapor and carbon dioxide of the lower atmosphere.

Up to now no hard X-rays or gamma rays coming from the sun have been measured. The problem may be one of low intensity, but it is certainly advisable to explore this region in conventional high altitude rockets before discussing applications for a satellite instrumentation. Of particular interest would be the measurement of the 2.2 Mev gamma ray which arises from the radiative nuclear capture of neutrons by protons and would indicate the presence of high energy neutrons on the sun. This is an experiment which could probably be done in a balloon because high energy gamma rays are quite penetrating; thus it is no longer necessary to observe at extremely high altitudes.

Corpuscular Radiation

During periods of great solar activity, one can observe with coronographs prominences of luminous gas being shot out from the solar surface. These observations indicate the great violence of solar processes. Recent radio observations of the sun have shown the existence of streams of charged particles which are shot out through the solar atmosphere during solar flares [9]. But for a half century now it has been hypothesized that the sun can emit clouds of ionized gas with velocities high enough to leave its surface and travel through interplanetary space past the earth. While it has not been possible to observe these gas clouds directly in their travel from the sun, their effects upon the earth are unmistakable. About a day following a strong solar flare (as manifested by visual observations on the solar disk and by ultraviolet enhancements leading to radio fadeouts), one observes a sudden increase of the earth's magnetic field, the so-called "sudden commencement". This is followed a few hours later by a slow decrease of the field which may last for several days. These "magnetic storms" are world-wide and are believed to be produced by the electromagnetic effects

of these streams of charged particles as they enter the earth's magnetic field. During these periods one also observes a large enhancement of the aurora in the northern and southern hemispheres. These auroral displays in the upper atmosphere are thought to be due to high speed corpuscles, possibly protons, which come from the sun during these periods of great activity. The regions of the sun which are responsible for the magnetic storms, the so-called *M*-regions, show great persistence; twenty-seven days later, one synodic rotation period of the sun, one may again observe a magnetic storm, an enhancement of the aurora, and associated cosmic ray effects. It is thought, therefore, that the active regions of the sun continue to emit a stream of particles which sweeps interplanetary space, very much like a stream of water from a rotating garden hose [1].

The nature of the solar streams, and the exact mechanism by which they cause magnetic storms, aurorae, and cosmic ray effects, are not well understood. A satellite could contribute to this study in two ways: (1) By intercepting the particles which cause the aurora, we would determine their nature and their intensity, their time variations and their geographical distribution. A satellite traversing an orbit over both poles would also obtain the world-wide distribution of auroral particles in the northern and southern hemispheres. This would give an important clue to their origin. (2) By studying the magnetic field above the conducting layers of the ionosphere one would obtain a better picture of the primary effects of the magnetic-storm producing beam since the magnetic effect observed at sea level is distorted by the ionosphere [7]. The instrumentation for these measurements is again well proven from high altitude rocket experiments. The auroral particle measurements could be done with thin-walled geiger counters whereas the magnetic storm measurements could be done by means of total field magnetometers such as have been used in Aerobee rockets.

The study of magnetic storms and aurorae is of considerable practical importance again from the point of view of radio communication. Magnetic storms have sometimes profound and very violent effects also on long distance telephone communication; the electric fields induced by the strong variations in the earth's magnetic field can easily burn out long distance cables and raise havoc with wire communication.

Cosmic Rays

Cosmic rays are corpuscular radiations of extremely high energies. The primary cosmic rays consist mainly of protons but also of helium nuclei and to a smaller extent of the nuclei of heavier elements. They arrive at the top of the atmosphere with almost the speed of light and with energies ranging from a few billion electron volts (Bev) up to a billion times as much. They constitute the highest energy phenomenon known in nature; but because of the small number of cosmic rays which are received here, the energy they bring in is about equal to the energy of starlight. The effects of cosmic rays on the earth and the earth's atmosphere are, therefore, probably negligible but they constitute one of the most important fields of study in modern physics and provide a challenging problem to the astrophysicist as well as to the nuclear physicist. The nuclear physicist studies cosmic rays because they represent nuclear particles of energy vastly greater than can be produced by even the largest accelerators. The cosmic rays in colliding with the atoms of the upper air produce nuclear reactions which cannot be duplicated in laboratory studies. The nuclear physicist, therefore, views cosmic rays essentially as a tool which nature has provided to help him in the study of high energy physics and with which he hopes to solve the problems of

the ultimate constitution of the nucleus and the ultimate nature of the "elementary" particles. Already the study of cosmic rays from that point of view has led to the discovery of many new types of elementary particles, the so-called mesons. There is reason to believe that their systematic study will lead eventually to a better understanding of the nature of nuclear forces [3].

The astrophysicist treats cosmic rays essentially as a phenomenon and as an indicator of processes which go on in the galaxy and in the solar system. He is mainly concerned about the origin of the cosmic radiation and about the manner in which they acquire the high energies; he asks about the processes which exist in the universe which can produce such tremendous energies. There is little doubt that these processes are electromagnetic in nature and that, therefore, a study of the origin of cosmic rays will lead to a better understanding of the electromagnetic conditions not only in the vicinity of the earth and in the solar system but also in our galaxy. This knowledge of magnetic fields in the galaxy can have a very profound influence on theories of the origin of galactic systems and on cosmology in general.

One of the most fruitful ways of studying the cosmic radiation is to investigate the distribution-in-energy of the primary rays. This has been accomplished in rocket experiments by observing the cosmic ray flux at different latitudes. The method makes use of the earth's magnetic field, which varies with latitude, and uses this field as an energy analyzer for cosmic radiations. It has led to the rather surprising finding that in the cosmic radiation there is at times an absence of low energy cosmic rays; i.e., below about 0.5 Bev there are very few cosmic rays compared to the number above this energy [5]. The mechanism which either keeps low energy cosmic rays from coming to the earth, or perhaps prevents their ever being produced, is not understood, and if cleared up will probably shed a great deal of light on the origin of cosmic rays themselves. Experimentally this absence of low energy cosmic rays manifests itself as follows: While the cosmic ray flux increases by a factor of ten in going from the equator to geomagnetic latitude 56° , there is no further increase observed between 56° and 90° . If the low energy cosmic radiation were present, the increase between 56° and 90° might be almost another factor of ten.

The most promising method, therefore, for using a satellite for cosmic ray studies would be to investigate the energy spectrum on a continuous basis by allowing the satellite to travel between 0° and 90° latitude to measure the intensity variation of cosmic rays as a function of latitude. We would like to discover, for example, whether the "knee" at 56° is fixed with time or whether its position changes as a function of the solar cycle, whether there are increases in intensity above 56° possibly correlated with phenomena on the sun, and so on.

From cosmic ray studies of the last few years we know that the cosmic ray intensity is not constant. Among the more pronounced effects there are two which seem to be especially suited to satellite observations, because of their large size. They are the cosmic ray increases which sometimes accompany certain bright solar flares, and the cosmic ray decreases which often occur in connection with magnetic storms [3].

The cosmic ray increases associated occasionally with solar flares manifest themselves in a rapid rise of the cosmic ray intensity about ten to thirty minutes after the solar flare. It seems fairly certain that the increases are due to cosmic ray particles, accelerated either on the sun or in the immediate vicinity of the sun, which travel towards the earth and are then deflected by the earth's magnetic field. This deflection causes the particles to be incident at certain locations, the so-called impact zones, with relation to the sun-earth line [10]. From our present

sea level observations it seems fairly certain that these cosmic ray increases are due to additional particles of low energy, i.e., not exceeding about 10 Bev. What is quite unknown, however, is the reason why only a few solar flares cause these large increases, four in the last 15 years. Satellite observations could establish whether increases occurred in the primary cosmic rays but were confined to such low energies that no effects could be detected at sea level.

The decreases of the cosmic ray intensity lasting a day or more and associated with magnetic storms are among the most puzzling phenomena. Recent observations that these decreases occur even at the pole establish that we are dealing here with a real decrease in the cosmic ray intensity in the vicinity of the earth, rather than a deflection away from the earth by the ring current which is thought to encircle the earth during periods of magnetic storms [4]. The question as to what produces this decrease in cosmic ray intensity is not at all settled. It is thought likely that the cosmic storms are produced by the corpuscular streams from the sun which are also responsible for magnetic storms. The cosmic ray decreases show the same 27-day recurrence, clearly associated with the 27-day synodic rotation period of the sun. One of the missing links for an interpretation of the phenomenon is again an observation of the primary spectrum during periods of cosmic ray storm decreases [7].

Techniques for observing the cosmic radiation are well developed from work in conventional rockets. Geiger counters of conventional and special design could be used to measure the flux and even the composition of the primary radiation.

Micrometeorites

We cannot study atomic particles of extremely low velocities; i.e., below the velocities of auroral particles, unless they occur in large streams and produce electromagnetic effects as is the case with the corpuscular streams from the sun. We can, however, study low velocity particles of higher mass, i.e., micrometeorites or interplanetary dust particles (dimension of the order of 1 micron). Depending on their orbits with respect to the earth they may enter the atmosphere with velocities up to about seventy kilometers per second. The larger ones produce, of course, the bright flashes and ionization trails associated with meteors but very small ones may escape detection entirely. No direct observations have been made of micrometeorites except for some exploratory rocket experiments in which their impacts have been observed either by condenser microphones or by the pitting of polished plates [7].

Observations of the zodiacal light and of the F-corona, the outer dust corona of the sun, have given some ideas of the density of interplanetary dust between the sun and the earth. Micrometeorites would perhaps have the same dimensions as dust particles but travel with rather high speeds into the atmosphere. The number of observations of the interplanetary dust are not sufficient as yet to establish any significant density variations with the solar cycle or even variations of a shorter time period. A particularly interesting point to investigate would be the effect of solar corpuscular beams on the dust density; it will be possible thereby to evaluate the "sweeping out" effect of a corpuscular beam. This study of the fluctuations in their intensity could be performed in a satellite by counting particle impacts; it would have considerable value in clearing up the origin of the interplanetary dust particles. The measurement of an intensity variation vs. latitude would give information on their momenta and electric charges.

Vol. 1
1955

Observations of the Earth's Upper Atmosphere

Earth's Albedo

One of the main questions which concerns meteorologists is the heat input to the earth from the sun. The heat balance of the earth can be described roughly as follows: The earth intercepts from the sun an amount of energy equal to the solar constant at the earth's orbit times the cross-sectional area of the earth. The solar constant has the value of 2 calories/cm²/min; it is believed that variations in the solar ultraviolet emission do not affect its value appreciably although UV radiation does have profound effects on the upper atmosphere. Of the total amount of energy intercepted a certain fraction is reflected in the visible. This reflection is of the order of 35%; it is mainly due to clouds, which have a very high albedo. The albedo of the land surface is of the order of 15% although snow and ice on the land surface will greatly increase the albedo. The largest portion of the earth's surface, the oceans, have an albedo of only 4% in the visible. The net energy, i.e. incident minus reflected, is used to heat the earth's surface and atmosphere. This energy influx is balanced by the heat loss from the earth's surface and the atmosphere; they radiate according to the classical radiation laws. Since their temperature is very low, of the order of 300 °K, the radiation occurs mainly in the far infrared, around ten microns. The energy is radiated isotropically into interplanetary space and is lost from the earth. The infrared loss tends to vary slowly because of the large heat capacity of the earth. The great unknown in the heat balance considerations is represented by the amount of reflected sunlight which depends so critically on the day-to-day cloud coverage of the earth. The satellite furnishes a very direct method for measuring the visual albedo of the earth and supplying thereby the vital missing link in the heat balance computations. It should, therefore, be possible to plot more detailed heat flux data for the earth, which in turn could lead to the possibility of predicting long range climate for various latitude belts of the earth and for various seasons. The practical importance of this possibility can hardly be overestimated.

The actual measurement of the earth's albedo is technically a very simple matter. A photocell which views the earth continuously would provide us with the necessary information.

Ionosphere

The radio signal from a satellite which is used to transmit the data from the various instruments can itself be used to yield important information about the ionosphere. As the satellite moves with respect to a fixed station, the total number of electrons between it and the receiving station decreases to a minimum and then increases. This change in index of refraction introduces an easily measured frequency shift. While this ionosphere frequency shift is always superimposed upon a DOPPLER shift, they can be separated and evaluated independently. The satellite transmitter, therefore, gives us a valuable tool for investigating the ionosphere in a manner which supplements the usual ionospheric investigations with reflected radio signals.

Upper Atmosphere Densities

The measurement of drag deceleration seems to be the only promising method for determining the densities in the very high atmosphere where the molecular mean free path is very much larger than any instrument or any vehicle which can be sent up. Clearly a vertically falling body of any appreciable mass will

not experience a measurable deceleration. It is only when the body travels in an orbit in which it can spend a long time in the upper atmosphere, that the product, deceleration \times time, leads to an appreciable change in velocity; even though the deceleration is very small, the time interval is long enough to allow the velocity change to be measured.

In the case of a satellite the velocity change will lead to a change in the elements of the orbit; it is, therefore, possible by measuring the change in the elements of the orbit to deduce upper atmosphere densities. A detailed study of the effects of upper atmosphere drag leads to the following results: An initially elliptical orbit which has a perigee sufficiently low in the atmosphere to experience appreciable drag, will after a certain number of orbits gradually approach a circular orbit. The rate at which the eccentricity decreases depends not only on the elements of the orbit but critically on the area and mass of the satellite¹.

Sodium Trail

It has been remarked earlier that the solar radiation produces reactions in the upper atmosphere which lead to the emission of light. Among the prominent emission lines of the night air glow are those of the "forbidden" oxygen transitions (5577 Å and 6300 Å) and also the yellow D-lines of sodium (5893 Å). During twilight, while the lower atmosphere is dark, the sun illuminates the upper atmosphere. Under these conditions the few sodium atoms of the upper atmosphere, because of resonance radiation, exhibit the characteristic yellow sodium line very strongly, the so-called "twilight flash" [1]. Since the sodium atoms are not localized, the emission is observed as a diffuse yellow glow. It has been suggested that if the concentration of sodium were enhanced, the sodium light emission would be similarly increased. Therefore, a novel application of a satellite would be to exhaust sodium vapor into the upper atmosphere so as to produce a defined trail of sodium atoms which would in turn exhibit a defined trail of the sodium emission light. This would lead to rather spectacular results since it should be possible to observe this sodium trail visually from the ground during twilight conditions. From the research point of view the sodium trail offers great advantages. Since the sodium atoms are subject to collisions with other gas atoms, they will soon cool down and share their temperature. From the spreading of the trail, therefore, we would be able to learn about the temperature and turbulence in the outermost layers of the earth's atmosphere and from the distortion of the trail we would be able to deduce the existence of winds in these rarefied regions. The sodium trail certainly promises to be one of the most exciting applications of satellite geophysical research.

Technical Questions

We may now turn our attention to the characteristics of the satellite and its orbit, which are required to make possible the investigations which we have

¹ In the elliptical orbit the energy loss occurs mainly at the perigee, the point of closest approach to the earth's surface. It is therefore possible to apply an approximation method in which the energy loss and velocity loss is concentrated at the perigee. This method can be used to predict with good accuracy the lifetime of a satellite after its initial orbit is determined and if its area and mass are known. After the orbit has become more or less circular, the energy loss will occur continuously and the circle will shrink in altitude until finally the energy loss per orbit becomes an appreciable fraction of the total energy. The perturbation method which has been used is then no longer applicable; the satellite rapidly loses altitude and intercepts the earth's surface. (For further details cf. Part II.)

outlined. With the simple instrumentation which these investigations demand, the weight of the satellite can be kept well below fifty pounds. The scientific data would be telemetered to the ground by a radio transmitter which carries superimposed on it a number of telemetering channels; each is assigned to a definite instrument which detects and transmits information about the phenomenon it is sensitive to. The largest portion of the weight will be the power supply and transmitter. Once a radio frequency channel has been established, each additional telemetering channel does not consume very much extra power or weight. The individual instrumentations probably weigh only of the order of ounces. The physical dimensions of the satellite can be similarly small, probably within a cylinder of about one foot diameter and one foot height. With proper precautions the temperature problems in the satellite are not critical; it is only necessary to establish good heat conductivity to prevent hot spots. The average temperature would be of the order of room temperature.

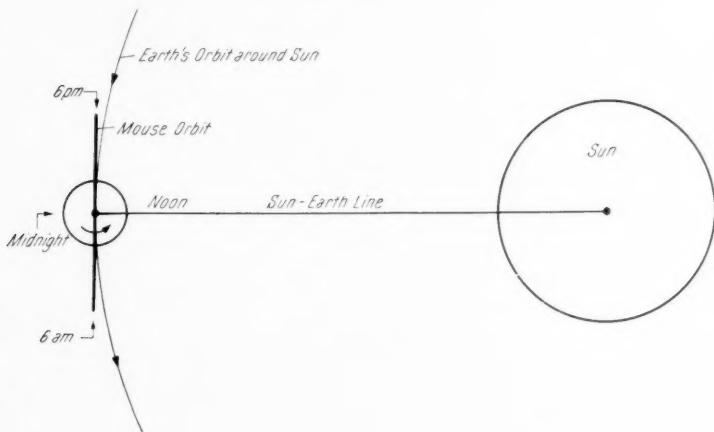


Fig. 3. MOUSE orbit in relation to the Sun (Note that MOUSE always appears only at 6 a.m. and 6 p.m. local time)

The various experiments outlined earlier strongly suggest an orbit [11] which will go over the poles of the earth rather than an equatorial orbit. Since, however, an equatorial orbit is easier to establish from the propulsion point of view, one probably should not insist too strongly on a polar orbit, at least to begin with, except to point out that it would allow the continuous observation of the sun and, therefore, the continuous production of electric power by means of silicon solar batteries. A polar orbit will also allow a study of the energy spectrum of the cosmic rays and the investigation of auroral particles in the auroral zone. It would further allow scanning of the complete earth's surface in order to obtain the cloud albedo. There are, therefore, many advantages in the choice of a polar orbit rather than an equatorial one; it is hoped that the additional propulsion which a polar orbit demands will not be too difficult to procure. In a polar orbit it would be most economical to store the telemetered information and release it only over the poles, either one or both, since this would demand a minimum of telemetering receiving stations. It is to be kept in mind that the orbit will stay more or less fixed in space as the earth turns underneath it. An orbit, therefore,

which is perpendicular to the earth-sun line, will offer the greatest advantage from the point of view of solar observation (Fig. 3).

A question equally as important as the propulsion problem is the degree of guidance necessary to achieve a desired orbit. The optimum launching altitude and the errors allowable in launching speed and angle are intimately tied up with each other and with the physical properties of the satellite. Together they determine the lifetime of the satellite. This is a matter of detailed considerations and is discussed in Part II. It is to be noted finally that optical visibility and precision of the orbit are of minor importance for a satellite whose main application is geophysical or astrophysical research. It is merely necessary to have it above the atmosphere for a sufficiently long period of time, which may mean only a few days. Astronomical perturbations can be neglected for such short lifetimes. It is seen, therefore, that the guidance and control problem, as well as the propulsion problem for this type of satellite is extremely simple [11] in comparison to satellites which are meant to fulfill more ambitious functions. It is this feature mainly which gives hope for the early accomplishment of a minimum instrumented satellite.

References

1. As a general reference see S. K. MITRA, *The Upper Atmosphere*, Calcutta: The Asiatic Society, 1952; also R. M. GOODY, *The Physics of the Stratosphere*. Cambridge: University Press, 1954.
2. G. P. KUIPER (ed.), *The Earth as a Planet*. University of Chicago Press, 1954.
3. J. G. WILSON (ed.), *Progress in Cosmic Ray Physics*. New York: Interscience Publishers, 1952.
4. A. B. MEINEL, *Astrophysic. J.* **113**, 50 (1951).
5. J. A. VAN ALLEN and S. F. SINGER, *Nature* **170**, 62 (1952).
6. S. CHAPMAN and J. BARTELS, *Geomagnetism*. Oxford: University Press, 1940; see also S. K. MITRA [1].
7. R. L. F. BOYD, M. J. SEATON and H. S. M. MASSEY (ed.), *Rocket Exploration of the Upper Atmosphere*. London: Pergamon Press Ltd., 1954.
8. H. E. NEWELL, *High Altitude Rocket Research*. New York: Academic Press Inc., 1953; also S. F. SINGER in: *Vistas in Astronomy*. London: Pergamon Press Ltd., 1955.
9. G. P. KUIPER (ed.), *The Sun*. University of Chicago Press, 1953.
10. J. FIROR, *Physic. Rev.* **94**, 1017 (1954).
11. S. F. SINGER, *J. Brit. Interplan. Soc.* **11**, 61 (1952); *ibid.* **13**, 74 (1954); *Sky and Telesc.* **14**, 15 (1954); *J. Astronautics* **2**, No. 3 (1955).

Vol.
1
1955

Optimum Launching of a Rocket Into an Orbit About the Earth¹⁾

By

D. F. Lawden, Birmingham², BIS

(With 1 Figure)

Abstract. Equations are obtained governing the trajectory along which a rocket may be guided into a circular orbit about the Earth from a launching point on its surface with a minimum expenditure of fuel. The numerical integration of these equations is discussed.

Zusammenfassung. Es werden Gleichungen für die Bahn abgeleitet, in der eine Rakete mit geringstem Treibstoffverbrauch von einem Startpunkt auf der Erdoberfläche in eine Kreisbahn um die Erde gelenkt werden muß. Die numerische Integration dieser Gleichungen wird diskutiert.

Résumé. Les équations gouvernant la trajectoire d'une fusée lancée d'un point de la surface terrestre pour être inscrite dans une orbite circulaire sont obtenues sous la condition d'un minimum de consommation de combustible. L'intégration numérique de ces équations est discutée.

I. Introduction

It has been proposed that the first step towards the establishment of an artificial satellite of the Earth should be taken by launching a multi-stage rocket capable of placing a payload of a few pounds in a circular orbit at a height of a few hundred miles above the Earth's surface [1]. This payload would comprise a number of instruments capable of recording the conditions existing outside the atmosphere and a telemetering apparatus which would transmit their findings to a base below. In this paper, we shall describe a method for calculating the rocket trajectory of least fuel from the launching tower to the circular orbit.

II. The Problem

We shall assume that the rocket is launched from a tower *A* (see fig. 1) situated on the Equator and that the whole of its trajectory and the orbit of the proposed satellite lie in the equatorial plane. The velocity of projection will be a given quantity, being compounded of the velocity at the Equator due to the Earth's rotation and the velocity acquired by the rocket from its booster (if any). The early part of the trajectory will be approximately vertical, but when the atmospheric film has been penetrated, we may expect the path to level out until it is approximately parallel to the Earth's surface. When the rocket has acquired sufficient momentum to carry it to the level of the satellite

¹ This paper was presented at the Sixth I.A.F.-Congress at Copenhagen, August 5, 1955.

² Department of Physics and Mathematics, College of Technology, Birmingham 1, England.

orbit, the motors will be shut down (at B) and the vehicle will coast along an elliptical arc intersecting the orbit at C . Upon arrival at C , a relatively short burst from the motors (of the order of 20 secs) will cause an increase in the rocket's velocity sufficient to affect its transfer into the circular orbit. This final velocity change we shall regard as taking place instantaneously. We shall also assume that the satellite orbit is tangential at C to the elliptical arc along

which the rocket coasts during the second phase of its motion. If, on the contrary, it is assumed that these two curves intersect obliquely and the argument of this paper is then carried to its logical conclusion, it will be found that a condition that the total fuel expenditure shall be stationary with respect to small variations of the trajectory is that the motors shall continue in operation until the satellite orbit is reached. Experience indicates that such a mode of fuel expenditure would be exceedingly wasteful and the stationary value to which it corresponds cannot therefore be the minimum sought.

During the first phase, when the motor is operating, we expect that the mode of fuel

consumption leading to the greatest economy will be determined by achieving a balance between two opposing requirements, (a) the requirement to reduce the air resistance by reducing the speed and (b) the requirement to expend fuel rapidly in order that energy is not wasted transporting fuel to great heights. Detailed consideration of this type of problem will be found in a previous paper [2]. Application of the method of this earlier paper shows that for a small rocket (say 1 ton mass at launching) the fuel expenditure can be so programmed that the optimum motion takes place. For a large rocket however (say 1000 tons mass at launching) the air resistance is negligible by comparison with the weight and requirement (b) is dominant. It follows that the optimum ascent velocity is very high. In such a case there is no possibility of achieving the optimum thrust programme. Instead, we shall suppose that the motor operates at maximum thrust from the instant of take-off to the instant when the motors are shut down and the second phase of the motion commences. The problem then remains of programming the direction of thrust during the first phase of the ascent in order to ensure minimum fuel expenditure over the complete manoeuvre.

III. Equations Governing the Optimum Manoeuvre

Let Ox_i ($i = 1, 2$) be fixed rectangular axes through the Earth's centre and in the equatorial plane and let x_i be the coordinates of the rocket at time t . If c is the jet velocity and M is the rocket's mass at any instant, the acceleration due to the motor thrust is $c dM/M dt$. The fuel consumption programme during the first phase of the motion we are regarding as specified and hence $c dM/M dt = f(t)$, a known function of t . If l_i are the direction cosines of the direction of thrust during the first phase, the equations of motion of the rocket are

$$\ddot{x}_i + F_i = fl_i, \quad (1)$$

where $-F_i$ are the components of the rocket's acceleration due to the air resistance and the gravitational attraction. Assuming that the orientation of the rocket relative to the direction of motion remains invariant during the ascent,

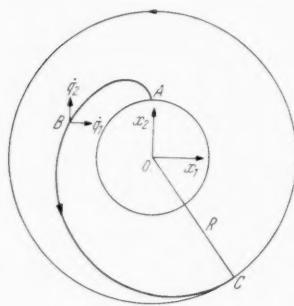


Fig. 1

Vol
1
195

$$F_i = F_i(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, M, t), \quad (2)$$

explicitly.

Suppose that the functions $l_i(t)$ determine the optimum thrust direction programme. Then we can solve the equations (1) for $x_i = x_i(t)$, specifying the optimum trajectory. At $t = 0$, the rocket is launched and x_i, \dot{x}_i take given values. Let the motors operate until $t = T$, T being selected so that at this instant the momentum which has been communicated to the rocket is just sufficient to enable it to coast to the satellite orbit along an elliptical arc tangential to the orbit. Let $x_i = q_i, \dot{x}_i = \dot{q}_i$ at $t = T$. If $\Phi(x_1, x_2)$ is the potential of the Earth's gravitational field and v is the velocity of arrival of the rocket at the satellite orbit, assuming that the second phase of the motion takes place in vacuo, it follows from energy considerations that

$$v^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\Phi(q_1, q_2) - 2\Phi_s, \quad (3)$$

where Φ_s is the potential at the satellite orbit. If R is the radius of the satellite orbit, since the velocity v is tangential to this orbit its moment about the Earth's centre is vR . But the moment of the rocket's velocity about this point remains constant during the motion along the elliptical arc and hence

$$vR = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1. \quad (4)$$

Equations (3) and (4) now yield the condition

$$\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\Phi(q_1, q_2) - 2\Phi_s - \frac{1}{R^2}(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1)^2 = 0, \quad (5)$$

determining the time T .

Consider a small variation in the thrust direction programme in which the functions l_i are replaced by $l_i + \delta l_i$. Since $l_1^2 + l_2^2 = 0$, the δl_i are related by the equation

$$l_i \delta l_i = 0, \quad (6)$$

but are otherwise arbitrary (the repeated index summation convention is operative in equation (6) and throughout the remainder of the argument). We shall assume the time of thrust to be increased to $T + \delta T$, δT being selected so that the approach to the satellite orbit remains tangential. Taking the first variation of equations (1), we obtain

$$\delta \ddot{x}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j = f \delta l_i. \quad (7)$$

These equations, together with the initial conditions $\delta x_i = \delta \dot{x}_i = 0$ at $t = 0$, fix the functions δx_i in terms of the δl_i and hence the varied trajectory.

Putting $\delta \dot{x}_i = \delta p_i$, we replace the equations (7) by the first order system

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \delta p_j + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j &= f \delta l_i, \\ \delta \dot{x}_i - \delta p_i &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Solving these equations by the method of the variation of parameters [3], we are led to consider the system of equations

$$\begin{aligned} \dot{z}_i + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} z_j + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} y_j &= 0, \\ \dot{y}_i - z_i &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

for the four functions y_i, z_i . Let $y_i = y_{ik}, z_i = z_{ik}$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3, 4$) represent a linearly independent set of solutions of the equations (9). Also, let

$A = |a_{ij}|$ be the determinant of the fourth order whose elements are given by the equations

$$\begin{aligned} a_{ij} &= z_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4), \\ &= y_{i-2,j} (i = 3, 4; j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (10)$$

Then equations (8) can be integrated over the time interval $(0, T)$ into the forms

$$\delta x_r(T) = \int_0^T \frac{f}{A} a_{ri} \delta l_i dt, \quad (11)$$

$$\delta \dot{x}_r(T) = \int_0^T \frac{f}{A} \beta_{ri} \delta l_i dt, \quad (12)$$

where $a_{ri} = a_{ri}(T, t)$, $\beta_{ri} = \beta_{ri}(T, t)$ are the determinants formed from A by replacement of its i th row by the elements $y_{rk}(T)$ and $z_{rk}(T)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) respectively.

$\delta x_r(T)$, $\delta \dot{x}_r(T)$ determine the variations in the rocket's position and velocity at the time $t = T$ due to the variation in the thrust direction programme. If the motors continue to operate for a further time δT , to the first order of small quantities, a further change of $\dot{q}_r \delta T$ will take place in the rocket's coordinates and a further change of $\ddot{q}_r \delta T$ in the components of its velocity. Hence, if Δq_r , $\Delta \dot{q}_r$ are the total variations in the rocket's coordinates and velocity components respectively at the end of the first phase due to the variation in the thrust direction programme, then

$$\Delta q_r = \dot{q}_r \delta T + \int_0^T \frac{f}{A} a_{ri} \delta l_i dt, \quad (13)$$

$$\Delta \dot{q}_r = \ddot{q}_r \delta T + \int_0^T \frac{f}{A} \beta_{ri} \delta l_i dt. \quad (14)$$

δT must be chosen so that condition (5) is satisfied for the case of the varied trajectory. By differentiating this condition, we find that

$$\dot{q}_i \Delta \dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \Delta q_i - \omega(q_1 \Delta \dot{q}_2 - q_2 \Delta \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \Delta q_1 - \dot{q}_1 \Delta q_2) = 0, \quad (15)$$

where $\omega = (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1)/R^2$ is the angular velocity of the rocket about the Earth's centre upon arrival at the satellite orbit.

Substitution in this equation for Δq_i , $\Delta \dot{q}_i$ from equations (13) and (14) yields the required equation for δT . This equation may be simplified by noting that at the termination of the first phase of the motion, the equations (1) take the form

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = f(T) l_i(T). \quad (16)$$

Also, by virtue of the radial nature of the Earth's field, we have the equation

$$q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}. \quad (17)$$

The simplified equation for δT is

$$[m_i \dot{q}_i - \omega(m_2 q_1 - m_1 q_2)] f(T) \delta T + \\ + \int_0^T \frac{f}{A} \left[\dot{q}_r \beta_{ri} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} a_{ri} - \omega(q_1 \beta_{2i} - q_2 \beta_{1i} + \dot{q}_2 a_{1i} - \dot{q}_1 a_{2i}) \right] \delta l_i dt = 0, \quad (18)$$

where $m_i = l_i(T)$.

Let w be the magnitude of the velocity increment necessary to effect transfer from the elliptical orbit into the satellite orbit. Then

$$w = V - v = V - \frac{1}{R} (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1), \quad (19)$$

where V is the velocity in the satellite orbit. Differentiating this equation, we calculate that the increment in w due to the variation of the thrust programme is given by

$$\Delta w = \frac{1}{R} (q_2 \Delta \dot{q}_1 - q_1 \Delta \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \Delta q_2 - \dot{q}_2 \Delta q_1), \\ = \frac{1}{R} (m_1 q_2 - m_2 q_1) f(T) \delta T + \\ + \frac{1}{R} \int_0^T \frac{f}{A} (q_2 \beta_{1i} - q_1 \beta_{2i} + \dot{q}_1 a_{2i} - \dot{q}_2 a_{1i}) \delta l_i dt, \quad (20)$$

after employing equations (13), (14), (16) and (17).

Δw is a measure of the increased fuel expenditure at the satellite orbit due to following the varied track. In the same units, the increase in fuel expenditure over the first phase of the ascent is $f(T) \delta T$. The net increase in fuel expenditure is therefore measured by $\Delta w + f(T) \delta T$. Substituting for Δw from equation (20) and then for δT from equation (18), we find that this measure of the increase in the fuel expenditure can be expressed in the form

$$\frac{1}{R} \int_0^T \frac{f}{A} (C P_i + D Q_i) \delta l_i dt, \quad (21)$$

where

$$B = R \{ \omega(m_2 q_1 - m_1 q_2) - m_i \dot{q}_i \}, \quad (22)$$

$$C = m_i \dot{q}_i - \omega R, \quad (23)$$

$$D = R - m_2 q_1 + m_1 q_2, \quad (24)$$

$$P_i = q_1 \beta_{2i} - q_2 \beta_{1i} + \dot{q}_2 a_{1i} - \dot{q}_1 a_{2i}, \quad (25)$$

$$Q_i = \dot{q}_r \beta_{ri} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} a_{ri}. \quad (26)$$

If the total fuel expenditure over the original manoeuvre is stationary with respect to all small variations of the thrust direction programme, the expression (21) must be zero for all functions δl_i satisfying the condition (6). This will be so if

$$l_1 : l_2 = C P_1 + D Q_1 : C P_2 + D Q_2. \quad (27)$$

This equation determines the thrust direction programme which must be followed if the fuel consumption is to be reduced to a minimum.

When $t = T$, $a_{ri} = 0$, since two rows of this determinant are then identical. Also, for this value of t , $\beta_{ri} = 0$ unless $r = i$ when $\beta_{ri} = A$. Thus, at the conclusion of the first phase of the manoeuvre

$$\begin{aligned} P_1 &= -q_2 A, & P_2 &= q_1 A, \\ Q_1 &= \dot{q}_1 A, & Q_2 &= \dot{q}_2 A. \end{aligned}$$

Thus, putting $t = T$ in equation (27), we find that it takes the form

$$m_2 \dot{q}_1 - m_1 \dot{q}_2 + \omega(m_1 q_1 + m_2 q_2) = \frac{1}{R} (q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2), \quad (28)$$

determining m_1 and m_2 and hence the direction of the thrust at this instant.

IV. Integration of the Equations

It is suggested that a method of successive approximation be employed for the purpose of integrating the equations determining the optimum trajectory.

Consider the rocket trajectories for which the direction of thrust is everywhere identical with the direction of motion relative to the Earth's surface. If the initial motion of the rocket is assumed to be along the vertical, a single infinity of such tracks leave any point on the Earth's surface. First it will be necessary to calculate a number of such trajectories by numerical integration of the equations of motion (1), terminating the integration in each case at the instant when the rocket has achieved sufficient momentum to carry it to the level of the satellite orbit, i.e. when condition (5) is satisfied. In this way a number of possible entries into the orbit will be obtained, of which the most economical can be employed as a first approximation to the optimum mode of entry.

The values of (q_1, q_2) , (\dot{q}_1, \dot{q}_2) given by the first approximation must then be substituted into equation (28) and corresponding first approximations to the quantities (m_1, m_2) calculated. Also the values of $\partial F_i / \partial \dot{x}_j$, $\partial F_i / \partial x_j$ must be found at points along the first approximate track so that equations (9) may be integrated numerically for the quantities y_{ik} , z_{ik} as functions of t . A linearly independent set of solutions of these equations may be found by adopting as initial conditions at $t = 0$

$$z_{ik} = \delta_{ik}, \quad y_{ik} = \delta_{i+2,k}, \quad (29)$$

the δ_{ik} being zero, unless both subscripts are equal, in which case their value is unity. A series of values of the quantities a_{ri} , β_{ri} can now be computed and substituted in equation (27). A new thrust direction schedule is thereby determined. Employing this in conjunction with the equations of motion (1), a second approximation to the optimum trajectory can be found and, if necessary, further improved by a repetition of the above procedure.

References

1. S. F. SINGER, A Minimum Orbital Instrumented Satellite—Now. J. Brit. Interplan. Soc. **13**, 74 (1954). See: Astronaut. Acta **1**, 171 (1955).
2. D. F. LAWDEN, Stationary Rocket Trajectories. Quart. J. Mech. **7**, 488 (1954).
3. E. G. C. POOLE, Linear Differential Equations, 8. Oxford: 1936.

Vol.
1
1955

On the Calculation of the Powered Flight of a Long Range Rocket,
Supervised by an Automatic Pilot¹

By

J. M. J. Kooy, Breda², NVR

(With 4 Figures)

Abstract. In general terms a scheme is indicated in order to compute the powered flight of a long range rocket, starting vertically at a latitude φ of the rotating earth, and then inclining to horizontal direction, while by control of an automatic pilot the axis of the rocket still remains parallel to an original orbit plane. The aerodynamical forces and moments coming into play are considered in this article to have been determined by aerodynamical research.

Zusammenfassung. Das allgemeine Schema für die Berechnung des Motorfluges einer Fernrakete wird angegeben. Das gebrauchte Bezugssystem ist mit der rotierenden Erde fest verbunden; die Startstelle hat die geographische Breite φ . Nach Voraussetzung steigt die Rakete vertikal auf und wird von einer eingebauten Steuervorrichtung in der Weise abgelenkt, daß die Längsachse stets parallel bleibt in Beziehung auf die Schmiegeungsebene der Bahn im Anfangspunkt. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, daß die auftretenden Luft-Kräfte und -Momente durch aerodynamische Forschung ermittelt wurden.

Résumé. Il s'agit d'une méthode générale pour calculer le mouvement à moteur d'une fusée à longue distance, par rapport à un système de coordonnées terrestres. On suppose que la fusée, commandée par une installation intérieure automatique, partant d'un point à latitude φ , commence à monter verticalement, et puis décline tellement, que l'axe longitudinal de la fusée reste parallèle au plan osculateur à l'origine de l'orbite.

Let us assume that the rocket is launched vertically at a latitude φ and is inclined to horizontal direction during ascent, steered by an automatic pilot. The motion of the rocket is considered with respect to an axis system rigidly connected with the earth. By centrifugal force, due to the rotation of the earth, and by the corresponding CORIOLIS force, the orbit of the rocket becomes three-dimensional.

The rocket is supposed to be equipped with external stabilizing vanes and two pairs of gas rudders for pitch and yaw. We assume that the rocket is controlled in such a way by an automatic pilot, commanding the gas rudders, that the longitudinal axis of the rocket still remains parallel to the original plane of motion.

In Fig. 1 the circle represents the meridian of the launching site P , at latitude φ . The origin of the axis system xyz , rigidly connected with the earth, coincides

¹ This paper was presented at the Sixth I.A.F. Congress at Copenhagen, August 5, 1955.

² Breda/Holland, Franklin Roosevelt-laan 14.

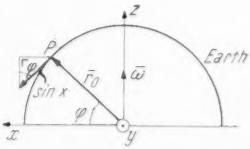


Fig. 1

with the center of the earth and the xz -plane with the meridian plane of P . The y -axis is perpendicular to the plane of the paper, directed to the observer. Further the z -axis coincides with the axis of rotation of the earth. The angular velocity of the earth be $\bar{\omega}$, indicated as vector along the z -axis, in right-handed relation with the sense of rotation.

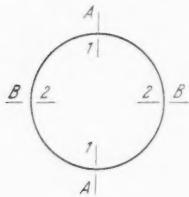
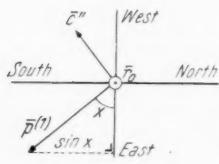


Fig. 2

- 1 } yaw-
- 1 } gas rudders
- A } external vanes
- A } \parallel to $\bar{p}^{(1)}$ and \bar{r}_0
- 2 } pitch-
- 2 } gas rudders
- B } external vanes
- B } \perp to $\bar{p}^{(1)}$ and \bar{r}_0

Fig. 3. \bar{r}_0 is \perp to plane of drawing

nose, is wholly determined by the angle ψ , included by this direction and $\bar{p}^{(1)}$. If m be the mass quantum expelled per second and $m\bar{c}$ the longitudinal thrust (along the axis of the rocket), we obtain:

$$\bar{c}^{(1)} = \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \bar{p}^{(1)} \cos \psi + \bar{r}_0^{(1)} \sin \psi \quad (2)$$

in which $\bar{r}_0^{(1)} = \frac{\bar{r}_0}{r_0}$. Hence by (1) and (2):

$$\bar{c}^{(1)} = (\bar{i} \sin \chi \sin \varphi + \bar{j} \cos \chi - \bar{k} \sin \chi \cos \varphi) \cos \psi + (\bar{i} \cos \varphi + \bar{k} \sin \varphi) \sin \psi,$$

or

$$\begin{aligned} \bar{c}^{(1)} = & \bar{i}[\sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi] + \bar{j}(\cos \chi \cos \psi) + \\ & + \bar{k}[-\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi]. \end{aligned} \quad (3)$$

If $m\bar{c}'$ denotes the thrust parallel to the yaw axis and $m\bar{c}''$ the thrust parallel to the pitch axis, the total thrust becomes:

$$m\bar{c}_{tot} = m(\bar{c} + \bar{c}' + \bar{c}'').$$

Then, if g_0 be the acceleration due to gravity at the terrestrial surface and $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ be the position of the center of gravity of the rocket + still included fuel at any time t , we obtain as differential equation of motion of this center of gravity:

$$(M - mt) \ddot{\bar{r}} = m(\bar{c} + \bar{c}' + \bar{c}'') - \frac{\bar{r}}{r} g_0 \frac{r_0^2}{r^2} (M - mt) + \\ + (\bar{i}x + \bar{j}y) \omega^2 (M - mt) + 2(\dot{\bar{r}} \times \omega) (M - mt) + \bar{L} + \bar{W}, \quad (4)$$

in which:

M = initial mass of rocket + included fuel at start time $t = 0$,

\bar{L} = "lift" = resulting aerodynamic force, acting on rocket perpendicular to $\dot{\bar{r}}$, and

\bar{W} = "air resistance" = resulting aerodynamic force acting on rocket in the direction of $-\dot{\bar{r}}$.

By influence of the centrifugal force and the CORIOLIS force due to the earth rotation, with respect to the original plane of motion (containing \bar{r}_0 and $\bar{p}^{(1)}$), the rocket tends to the right. Let us assume that thereby an aerodynamic yaw moment arises (= momentum about the yaw axis, parallel to $\bar{p}^{(1)}$ and \bar{r}_0 , through the instantaneous center of gravity of the rocket + still included fuel), trying to turn the nose of the projectile to the right. In order to cancel this aerodynamic moment, \bar{c}'' must be directed as indicated in Fig. 3. Hence $\bar{c}'' = c''(\bar{p}^{(1)} \times \bar{r}_0^{(1)})$. Or in connection with (1):

$$\bar{c}'' = c'' \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sin \chi \sin \varphi & \cos \chi & -\sin \chi \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ = \bar{i} c'' \cos \chi \sin \varphi - \bar{j} c'' (\sin \chi \cos^2 \varphi + \sin \chi \sin^2 \varphi) - \bar{k} c'' \cos \varphi \cos \chi = \\ = \bar{i} c'' \cos \chi \sin \varphi - \bar{j} c'' \sin \chi - \bar{k} c'' \cos \varphi \cos \chi. \quad (5)$$

Further $m\bar{c}'$ must be directed in such a way that a moment with respect to the pitch axis (through the instantaneous center of gravity of the rocket + still included fuel) arises, tending to decline the rocket to horizontal position. Hence: $\bar{c}' = c'(\bar{c}''^{(1)} \times \bar{c}^{(1)})$. Or in connection with (3) and (5):

$$\bar{c}' = c' \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \chi \sin \varphi & -\sin \chi & -\cos \varphi \cos \chi \\ \sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \chi \cos \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix} \quad (6)$$

from which the components of \bar{c}' in \bar{i} , \bar{j} and \bar{k} direction follow.

The numerical value of c' depends on the deflection of the pitch gas rudder pair which we have supposed as prescribed function of time. $c' = c'(t)$ can therefore also be considered as prescribed function of time. The numerical value of c'' is determined by the required equilibrium of moments about the instantaneous yaw axis. The moment of the aerodynamic forces about this yaw axis be denoted by \mathfrak{M}_2 , and is dependent on the air density, hence on r , on the speed magnitude $|\dot{\bar{r}}|$ and the position of the rocket body with respect to the direction of $\dot{\bar{r}}$, and on the time t , in connection with the displacement of the instantaneous center of gravity as to the rocket fusilage, due to the fuel consumption. Hence we may write:

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2(r, |\dot{\bar{r}}|, a, \beta, t), \quad (7)$$

in which

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\dot{r}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad a = \angle(\dot{r}, \bar{c}), \quad \beta = \angle(\dot{r}, \bar{c}').$$

Then the angles a and β determine the position of the rocket body as to the direction of \dot{r} . The complicated function symbolically indicated by (7) must be determined by aerodynamic research. We shall assume in this article that the relation (7) is given in numerical way. Then c'' follows from:

$$m c'' h_2(t) = \mathfrak{M}_2(r, |\dot{r}|, a, \beta, t), \quad (8)$$

in which $h_2 = h_2(t)$ denotes the leverage of the thrust component $m \bar{c}''$ with respect to the yaw axis through the instantaneous center of gravity. By the shift of the center of gravity, due to the fuel consumption, this quantity h_2 is a function of time. Because the fuel consumption per second is known and considered as constant, we may consider the function $h_2 = h_2(t)$ as known. Hence by (8):

$$c'' = \frac{\mathfrak{M}_2(r, |\dot{r}|, a, \beta, t)}{m h_2(t)}, \quad (9)$$

in which in connection with (3) and (5):

$$\begin{aligned} a &= \arccos \frac{\dot{r} \cdot \bar{c}}{|\dot{r}| c} = \arccos \frac{\dot{r} \cdot \bar{c}^{(1)}}{|\dot{r}|} = \\ &= \arccos \frac{\dot{x}(\sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) + \dot{y} \cos \chi \cos \psi + \dot{z}(-\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \chi)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

and

$$\begin{aligned} \beta &= \angle(\dot{r}, \bar{c}') = \angle(\dot{r}, (\bar{p}^{(1)} \times \bar{r}_0^{(1)})) = \arccos \frac{\dot{r} \cdot (\bar{p}^{(1)} \times \bar{r}_0^{(1)})}{|\dot{r}| |\bar{p}^{(1)} \times \bar{r}_0^{(1)}|} = \\ &= \arccos \frac{\dot{r} \cdot (\bar{p}^{(1)} \times \bar{r}_0^{(1)})}{|\dot{r}|} = \arccos \frac{\dot{x} \cos \chi \sin \varphi - \dot{y} \sin \chi - \dot{z} \cos \varphi \cos \chi}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Further

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}}{r} g_0 \frac{r_0^2}{r^2} (M - m t) &= \\ &= \left(\bar{i} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \bar{j} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \bar{k} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) g_0 r_0^2 (M - m t) \end{aligned} \quad (12)$$

and

$$2(\dot{r} \times \bar{\omega})(M - m t) = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & u \end{vmatrix} (M - m t) = (\bar{i} \cdot 2 \dot{y} \omega - \bar{j} \cdot 2 \dot{x} \omega)(M - m t) \quad (13)$$

In order to derive the components of \bar{L} in x , y and z direction, it may be observed that in general the vectors \bar{L} , \bar{c} and \bar{v} , drawn from a common initial point, are not contained in one plane. Therefore let us decompose \bar{L} in a component \bar{L}' perpendicular to $\dot{r} \times \bar{c}$, and a component \bar{L}'' parallel to $\dot{r} \times \bar{c}$. Then, in similar way as in relation (7), we may write:

$$\bar{L}' = L'(r, |\dot{r}|, a, \beta) \quad (14)$$

$$\bar{L}'' = L''(r, |\dot{r}|, a, \beta). \quad (15)$$

Comparing the relations (14) and (15) with (7), it may be observed that (14) and (15) do not contain t (in explicit form), because L' and L'' are only dependent on the external shape of the rocket and therefore independent on the shift of the instantaneous center of gravity due to fuel consumption. The complicated relations (14) and (15) must again be determined by aerodynamical research, and will here be considered as known functions, given in numerical way.

In Fig. 4 $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$, \bar{v} , \bar{c} and \bar{L}' are belonging to the plane of the drawing and \bar{L}'' perpendicular to this plane, directed to the observer. From this fig. 4 it follows:

$$\bar{L}'' = L'' \frac{\bar{v} \times \bar{c}}{|\bar{v} \times \bar{c}|}, \quad (16)$$

$$\bar{L}' = L' \frac{(\bar{v} \times \bar{c}) \times \bar{v}}{|(\bar{v} \times \bar{c}) \times \bar{v}|}, \quad (17)$$

$$\bar{L} = \bar{L}' + \bar{L}''. \quad (18)$$

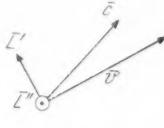


Fig. 4

Now in connection with (3) we obtain:

$$\bar{v} \times \bar{c}^{(1)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \chi \cos \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix}$$

so that:

$$\bar{L}'' = L'' \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \chi \cos \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \chi \cos \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix} \quad (19)$$

We then further obtain:

$$\bar{L}' = L' \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (20)$$

in which:

$$D_x = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \cos \chi \cos \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix},$$

$$D_y = - \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{z} \\ \sin \chi \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix},$$

and

$$D_z = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \chi \cos \psi \end{vmatrix}.$$

Further

$$\bar{W} = -\frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|} W(r, |\dot{\bar{r}}|, \alpha, \beta) = \frac{\bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} W(r, |\dot{\bar{r}}|, \alpha, \beta), \quad (21)$$

in which the function $W = W(r, |\dot{\bar{r}}|, \alpha, \beta)$ must be determined by aerodynamical research and will be considered here as numerically given. Further the resultant exhaust speed of the gas jet:

$$c_{tot} = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$$

may be considered as a given constant quantity, so that then c is determined by:

$$c = \sqrt{c_{tot}^2 - c'^2 - c''^2}. \quad (22)$$

Now the deflections of the rudders will still be small, so that also the angular deviation γ of the gas jet from the longitudinal direction will be small. Then

$$c_{tot} - c = c_{tot}(1 - \cos \gamma) = c_{tot} \left(\frac{\gamma^2}{2!} - \frac{\gamma^4}{4!} + \dots \right)$$

will be small of second order, so that we may displace (22) by:

$$c \approx c_{tot}. \quad (23)$$

By the relations (3), (5), (6), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (18), (19), (20), (21) and (23) the component equations of (4) in x , y and z direction are defined. Let us indicate these component equations of (4) by writing:

$$\ddot{x} = F_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, t), \quad (24)$$

$$\ddot{y} = F_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, t), \quad (25)$$

$$\ddot{z} = F_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, t). \quad (26)$$

Further we obtain as fourth differential equation of motion:

$$I(t) \ddot{\psi} = m c'(t) \cdot h_1(t) - \mathfrak{M}_1(r, |\dot{\bar{r}}|, \alpha, \beta, t). \quad (27)$$

In this equation is:

$h_1(t)$ = leverage of the thrust $m \bar{c}'(t)$ with respect to the pitch axis through the instantaneous center of gravity of rocket + still included fuel. This quantity is again a function of time, due to the shift of the instantaneous center of gravity with respect to the rocket fuselage, caused by the fuel consumption.

Further:

$\mathfrak{M}_1(r, |\dot{\bar{r}}|, \alpha, \beta, t)$ = the moment of the aerodynamic forces about the instantaneous pitch axis, which must again be determined by aerodynamical research, and will again be considered here as numerically given.

$I(t)$ = the moment of inertia of the system (rocket + still included fuel) with respect to the instantaneous pitch axis, and may also be considered as a given function of time.

Dividing by $I(t)$, let us write for (27):

$$\ddot{\psi} = F_4(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, t). \quad (28)$$

Strictly speaking, also an aerodynamic damping influence arises as to the rotation ψ , so that in (27), \mathfrak{M}_1 also contains $\dot{\psi}$. Because $\dot{\psi}$ will still be small, this damping influence may here be disregarded. The system (24), (25), (26), (28) can then be integrated by steps according to the method of RUNGE and KUTTA.

As 8 initial conditions we obtain:

for $t = 0 \rightarrow x = 0, y = 0, z = r_0 \sin \varphi, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0, \psi = \pi/2, \dot{\psi} = 0$.

We then have:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \xi, \quad \dot{y} = \eta, \quad \dot{z} = \zeta, \quad \dot{\psi} = \theta \\ \dot{\xi} = F_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) \\ \dot{\eta} = F_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) \\ \dot{\zeta} = F_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) \\ \dot{\theta} = F_4(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{with initial conditions:} \\ \text{at } t = 0 \rightarrow x = r_0 \cos \varphi, \quad y = 0, \\ z = r_0 \sin \varphi, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \\ \psi = \pi/2, \quad \theta = 0. \end{array}$$

We then obtain the scheme:

$$t \rightarrow \text{step increment } h, \quad x \rightarrow k, \quad y \rightarrow l, \quad z \rightarrow n, \quad \xi \rightarrow p, \quad \eta \rightarrow q, \quad \zeta \rightarrow s, \quad \psi \rightarrow u, \quad \theta \rightarrow w.$$

$$k = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \quad q = \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{3}q_3 + \frac{1}{6}q_4$$

$$l = \frac{1}{6}l_1 + \frac{1}{3}l_2 + \frac{1}{3}l_3 + \frac{1}{6}l_4 \quad s = \frac{1}{6}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{6}s_4$$

$$n = \frac{1}{6}n_1 + \frac{1}{3}n_2 + \frac{1}{3}n_3 + \frac{1}{6}n_4 \quad u = \frac{1}{6}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{6}u_4$$

$$p = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{6}p_4 \quad w = \frac{1}{6}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3 + \frac{1}{6}w_4$$

$$k_1 = \xi h$$

$$l_1 = \eta h$$

$$n_1 = \zeta h$$

$$u_1 = \theta h$$

$$k_2 = (\xi + p_1/2) h$$

$$l_2 = (\eta + q_1/2) h$$

$$n_2 = (\zeta + s_1/2) h$$

$$u_2 = (\theta + w_1/2) h$$

$$k_3 = (\xi + p_2/2) h$$

$$l_3 = (\eta + q_2/2) h$$

$$n_3 = (\zeta + s_2/2) h$$

$$u_3 = (\theta + w_2/2) h$$

$$k_4 = (\xi + p_3) h$$

$$l_4 = (\eta + q_3) h$$

$$n_4 = (\zeta + s_3) h$$

$$u_4 = (\theta + w_3) h$$

$$p_1 = F_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) h$$

$$p_2 = F_1(x+k_1/2, y+l_1/2, z+n_1/2, \xi+p_1/2, \eta+q_1/2, \zeta+s_1/2, \psi+u_1/2, t+h/2) h$$

$$p_3 = F_1(x+k_2/2, y+l_2/2, z+n_2/2, \xi+p_2/2, \eta+q_2/2, \zeta+s_2/2, \psi+u_2/2, t+h/2) h$$

$$p_4 = F_1(x+k_3, y+l_3, z+n_3, \xi+p_3, \eta+q_3, \zeta+s_3, \psi+u_3, t+h) h$$

$$q_1 = F_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) h$$

$$q_2 = F_2(x+k_1/2, y+l_1/2, z+n_1/2, \xi+p_1/2, \eta+q_1/2, \zeta+s_1/2, \psi+u_1/2, t+h/2) h$$

$$q_3 = F_2(x+k_2/2, y+l_2/2, z+n_2/2, \xi+p_2/2, \eta+q_2/2, \zeta+s_2/2, \psi+u_2/2, t+h/2) h$$

$$q_4 = F_2(x+k_3, y+l_3, z+n_3, \xi+p_3, \eta+q_3, \zeta+s_3, \psi+u_3, t+h) h$$

$$s_1 = F_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) h$$

$$s_2 = F_3(x+k_1/2, y+l_1/2, z+n_1/2, \xi+p_1/2, \eta+q_1/2, \zeta+s_1/2, \psi+u_1/2, t+h/2) h$$

$$s_3 = F_3(x+k_2/2, y+l_2/2, z+n_2/2, \xi+p_2/2, \eta+q_2/2, \zeta+s_2/2, \psi+u_2/2, t+h/2) h$$

$$s_4 = F_3(x+k_3, y+l_3, z+n_3, \xi+p_3, \eta+q_3, \zeta+s_3, \psi+u_3, t+h) h$$

$$w_1 = F_4(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \psi, t) h$$

$$w_2 = F_4(x+k_1/2, y+l_1/2, z+n_1/2, \xi+p_1/2, \eta+q_1/2, \zeta+s_1/2, \psi+u_1/2, t+h/2) h$$

$$w_3 = F_4(x+k_2/2, y+l_2/2, z+n_2/2, \xi+p_2/2, \eta+q_2/2, \zeta+s_2/2, \psi+u_2/2, t+h/2) h$$

$$w_4 = F_4(x+k_3, y+l_3, z+n_3, \xi+p_3, \eta+q_3, \zeta+s_3, \psi+u_3, t+h) h$$

We have to run through this scheme, as to any step h , by computing in sequence

$$\begin{aligned} & k_1 l_1 n_1 p_1 q_1 s_1 u_1 w_1 k_2 l_2 n_2 p_2 q_2 s_2 u_2 w_2, \\ & k_3 l_3 n_3 p_3 q_3 s_3 u_3 w_3 k_4 l_4 n_4 p_4 q_4 s_4 u_4 w_4. \end{aligned}$$

By repeating the computation for a certain interval of t with half the number of steps, each step being $2h$, and comparing the result with the result of the first computation, we can make an estimate of the error corresponding with the first computation.

1/15th of the difference in result of both computations will then be a measure of the order of magnitude of this error.

Alternatively we can prescribe, instead of $c' = c'(t)$, $\psi = \psi(t)$. Then we find from (27):

$$c'(t) = \frac{I(t) \dot{\psi}(t) + \mathfrak{M}_1(r, |\dot{r}|, a, \beta, t)}{m h_1(t)} \quad (29)$$

in which, according to (10) and (11), a and β are functions of \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} and $\psi(t)$. In the equations (24), (25) and (26) we have then to introduce (29) with (10) and (11) included. We then only obtain the system:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi, \quad \dot{y} = \eta, \quad \dot{z} = \zeta \\ \dot{\xi} &= f_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) \\ \dot{\eta} &= f_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) \\ \dot{\zeta} &= f_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t). \end{aligned} \quad (30)$$

with initial conditions:

$$\begin{aligned} t = 0 \rightarrow x &= r_0 \cos \varphi, & y &= 0, & z &= r_0 \sin \varphi \\ \xi &= 0, & \eta &= 0, & \zeta &= 0. \end{aligned}$$

This system can again be integrated by steps by means of the method of RUNGE and KUTTA.

A Suggested Organization of Space Flight Sciences¹

By

D. C. Romick, North Canton, O.², ARS

Abstract. A suggested organization of component sciences intended to make up the complete field of astronautical sciences is given (which turns out to be analogous in many respects to what has evolved for the aeronautical sciences) along with a definition, and a brief description and discussion of each, in some cases including a breakdown of the more novel or complex ones into their more elementary components, presented in outline form. The most significant new science emerging from this is referred to as *astrodynamics* (analogous to aerodynamics in aeronautics), being that science which deals with the dynamic flight behavior of space vehicles. If acceptable, this material should be valuable as guidance to students and others interested in entering astronautics, and for stipulating the required textbooks to be written, college courses and curricula to be set up, and engineering specialties required.

Zusammenfassung. Es wird eine Organisation der Teilwissenschaften vorgeschlagen, die das gesamte Gebiet der astronautischen Wissenschaften umfassen soll. (Dabei ergeben sich in vielen Beziehungen Analogien zur Entwicklung der aeronautischen Wissenschaften.) Der Vorschlag wird von einer Definition sowie einer kurzen Beschreibung und Diskussion jeder dieser Teilwissenschaften begleitet. Dabei wird in manchen Fällen eine Unterteilung der neueren oder zusammengesetzten Teilgebiete in die elementareren Bestandteile in Form einer Übersicht gegeben. Die daraus entspringende bedeutungsvollste der neuen Zweigwissenschaften wird als *Astrodynamik* (analog zur Aerodynamik in der Aeronautik) bezeichnet, da sie jene Wissenschaft ist, die sich mit dem dynamischen Flugverhalten von Raumfahrzeugen befaßt. Falls das dargelegte Schema annehmbar erscheint, könnte es als nützliche Orientierung für Studenten und andere angehende Interessenten der Astronautik dienen, ferner als Anregung zur Abfassung notwendiger Lehrbücher, für College-Lehrgänge und -Lehrpläne, sowie auch für erforderlich werdende ingenieurwissenschaftliche Spezialfächer.

Résumé. On suggère une subdivision des matières susceptible de couvrir le domaine complet des sciences astronautiques. Sous plusieurs aspects elle est analogue à celle issue de l'évolution des sciences aeronautiques. La définition des matières, une brève description, éventuellement accompagnée d'une nouvelle subdivision en éléments simples, y est esquissée. La plus caractéristique des sciences nouvelles est l'*astrodynamique*, dont le rôle serait parallèle à celui que joue l'aérodynamique dans le cadre de l'aéronautique. Elle est définie comme l'étude du comportement dynamique des véhicules dans l'espace interplanétaire. Pour autant qu'elle soit significative, cette étude pourrait rendre service à ceux que ce domaine intéresse en indiquant les cours à organiser, les textes à publier et les spécialisations d'ingénieur à créer.

¹ This paper was presented at the Sixth I.A.F. Congress at Copenhagen, August 6, 1955.

² 2619 Maplecrest Road, N. W., North Canton, Ohio, U.S.A.

Introduction

The advancing activity in the field of space flight seems to suggest that it will become a major activity during the next decade or so. It further appears that it is now at a point corresponding to that of aeronautical science in the opening years of the Twentieth Century; i.e., that it is about to be put into practice, at least in initial experimental form.

Assuming that this is so, it seems appropriate to organize the field of astronautical sciences so that those who will be going into the field professionally will be able to find a clearly defined area or speciality suitable to their interests and talents. If such areas are clearly and reasonably accurately defined now, they will be permanent, rather than transitory, and will permit preparation of suitable reference textbooks, methods of analysis, and other tools to support these component sciences. If properly conceived, they would combine to form the complete basic field of astronautical science, and specialists from each of the individual areas could be organized into an effective, completely integrated technical team for carrying out any of the various projects, large and small, that will constitute the achievement of space flight.

Further, since the nature of our present technology is such that activity and accomplishment may very likely proceed more rapidly (in conformance with our accelerating technical capabilities) than fields developed earlier in our technological progress, the need is probably more significant and more urgent than it was for these earlier fields at the outset of their development.

Therefore, it is the purpose of this paper to suggest a logical organization of the astronautical sciences that might serve as a starting point toward fulfillment of the needs and circumstances set forth above.

The Major Breakdown

In many ways, the field of astronautical sciences resembles that of aeronautics. Both are composed largely of a group of refined mechanical sciences, dealing primarily with vehicles for operating in media not associated directly with the earth's surface. Both involve three-dimensional motion, forces, inertia, and equilibrium; and are sensitive to the interplay of these quantities. Both are vitally concerned with the machines for such operations, with the means for propelling and guiding them; and with the capabilities, limitations, and well-being of the men who occupy and operate them, and a host of smaller analogous items, such as communications and instrumentation.

Accordingly, it is not surprising that we can find logical component sciences in aeronautics that are analogous to those that experience has built up and found proper in the field of aeronautics. Since this has undergone a natural evolution, and is time-proved, it would seem prudent to follow this lead, whenever the results will stand the test of logical examination and justification.

For example, analogous to the science of aerodynamics in aeronautics, we might place a science of *astrodynamics* in astronautics, defined as that dealing with the performance, kinetics and dynamics, stability, and control of spacecraft, in a way that is analogous to the similar elements determining the behavior of aircraft.

Similarly, we could consider the science of *spacecraft propulsion*, analogous to that of aircraft propulsion. A very suitable reference textbook has already been written in this area¹, although subsequent texts will undoubtedly go much

¹ G. P. SUTTON, *Rocket Propulsion Elements*. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1949.

Vol
1
1955

Vol. 1
955

further into other than chemical propulsion systems, such as atomic and ion rockets, as these concepts evolve during the coming years. (Much can be, and has been, written today concerning their fundamental principles and possible methods of implementation.) The capabilities generated in the science of spacecraft propulsion will bear directly on the performance aspects of astrodynamics, exactly as aircraft propulsion relates to the performance aspects in aerodynamic behavior.

Spacecraft control systems will comprise a science analogous to that of aircraft control systems, which has only recently attained maturity with the advent of servomechanism and electro-mechanical control elements needed in present-day high speed aircraft and guided missiles. Although some of the devices will differ, many of the techniques will correspond. Of course, the operational criteria and methods for analysis and design will be specific for spacecraft.

Likewise, *spacecraft guidance* will be an important science bearing a heavy resemblance to many techniques for piloted and pilotless aircraft, especially the latter.

Spacecraft instrumentation will encompass utilization not only of many of the devices installed in high-speed aircraft for measuring aerodynamic parameters, but will place heavier emphasis on devices for measuring and handling such quantities as accelerations, time, impulse integral, etc. Provisions for indicating readings to crew members (for monitoring, control, and navigation), and transmitting them to ground stations, will also resemble those of aircraft, but will have to conform to the specific requirements of spacecraft installation and operation. Many of these will work hand-in-hand with guidance and control equipment.

Spacecraft structures, while being a science analogous and similar to aircraft structures, will require specific understanding and emphasis corresponding to the unique operating characteristics and nature of design criteria for spacecraft. It will be a highly refined science, bearing even more, if possible, on performance capabilities than is the case of aircraft structures. Weight and balance engineering and control for spacecraft will likewise, if possible, be of even more critical importance than for aircraft.

Spacecraft design engineering will be analogous and similar to aircraft design, but again will require a thorough understanding and application of the unique requirements of spacecraft. Refinement and quality of design will pay off handsomely in spacecraft safety and performance.

Among the operational sciences and skills, we have *astro-navigation*, corresponding to aeronavigation (or avigation) for operation of aeronautical vehicles (aircraft). While in many respects there exist similarities, the ever-present orbital factors and influences will be predominant in the application of this science.

Another will be *astro-communications* (or spacecraft communications). While analogous to aircraft communications, it will differ greatly in many important respects.

Cosmology may eventually have a position and operational importance for astronautics paralleling meteorology for aeronautics, and *astro-biology*, or space medicine, will be a counterpart of aero-medicine.

Other operational areas which will have analogous counterparts in aeronautics, but which will at the same time be unique, would include spacecraft maintenance and repair, and spacecraft pilotage.

The agencies which engage in the development and operation of spacecraft will need to engage teams possessing and capable of applying the training and

skills listed and described above. These are the professional areas that will be open to those entering astronautical pursuits; and these will be the courses that will be required in the curricula of colleges and professional schools offering training in astronautics and astronautical engineering. These indicate the reference textbooks that will be utilized, and (in most cases) need yet to be written, for these purposes.

Description of Component Sciences

While some of the component sciences of astronautics listed and defined above are fairly obvious, some of the others merit fuller description and discussion:

Astrodynamicics

For example, astrodynamics represents a new science. It embraces everything which determines the characteristic behavior of a rocket vehicle which is guided and controlled by a specified system and propelled by a powerplant of given performance characteristics. Just as with aerodynamics, it is dependent upon the weight and balance and other structural characteristics derived jointly by the structural and design engineers. It covers vehicle performance, stability (both static and dynamic), control, and associated testing for basic dynamic parameters (corresponding to wind tunnel vibration and flutter testing, and free-flight testing in aerodynamics). It covers these basic characteristics or areas for all regimes of spacecraft operation, including aerodynamic and aeroballistic (as on take-off within an atmosphere), powered ballistic (as during acceleration outside the atmosphere, or take-off from, or landing on, an airless body), un-powered ballistic (as in coasting trajectory or orbital flight), high speed aerodynamics (as in atmospheric reentry), airplane type aerodynamics (as in glide and normal airplane type landing approach, or transfer between bases), and such special areas as dynamic behavior during stage separation, trajectory corrections, certain emergency manoeuvres, etc.

Astrodynamicics will also be called upon to make its contribution to the dynamic behavior of satellite stations, including the long term drag for close-in satellites, and the orientations control, and similar problems.

All these areas of dynamic behavior will have to be handled relative not only to the earth, but all sorts of planetary bodies, with their various combinations of gravitational, size, and atmospheric characteristics.

Astrodynamicists will also have to have an understanding of basic celestial mechanics, especially elementary orbital mechanics, including perturbations, precession, and other similar effects of planetary distortion or simple multiple body situations. But these are primarily the problems of astronavigation.

So astrodynamics forms a fusion center, or hub, so to speak, for integrating the efforts of the various other astronautical engineers and scientists to generate truly spaceworthy vehicles with suitable performance, just as the aerodynamicists similarly weld together the efforts of the various other aeronautical engineers to provide airworthy, high performance aircraft.

Astrodynamicics would be composed of the following areas and elements:

Rocket-powered flight within an atmosphere (or, aerodynamics and aeroballistics of space vehicles)

Performance

Acceleration — thrust, gravity, earth rotation
Fuel consumption

Vol
1
195

Drag
Staging

Stability

Aerodynamic
Rocket jet stabilization
Combined effects
Multi-stage
Stage separation

Control

Aerodynamic
Rocket jet control
Combined effects

Take-Off

Trajectories
Performance
Stability and control

Rocket-powered flight outside an atmosphere (or, powered ballistics
of space vehicles)

Performance

Fuel Consumption

Stability and Control

Trajectory Factors

Take-off from an Airless Planet

Descent and Landing on an Airless Planet

Technique
Stability and control

Atmospheric re-entry

Drag Deceleration

Lift

Stability and Control

Air Loads

Aerodynamic Heating

Surface and body design
Heat influx, radiation, temperature stability, cooling

Trajectory Techniques

Path Variations

Atmospheric Variations

Unpowered gliding or airplane type powered flight

Lift

Drag

Stability and Control

Coasting flight outside an atmosphere

Orientation Control

Reaction
Gyro
Flywheel

Vol.
1
1955

Trajectory Control

- Orbital factors
- Trajectory corrections

*Miscellaneous**Testing and Instrumentation Techniques*

- Wind tunnel
- Free flight
- Analysis

Satellite Station Dynamics

- Orientation control
- Orbital control and corrections

Recovery Methods and Techniques

- Parachute
- Glide

Miscellaneous Orbital Considerations

- Basic principles
- Secondary effects
- Perturbations
- Precession

Elementary Astronavigation

An alternate outline organization of astrodynamics might consider all performance aspects (for all operating regimes — take-off and landing, with and without an atmosphere, and in flight outside the atmosphere, etc.), then all stability and control aspects (similarly for all operating regimes), and then other miscellaneous areas of vehicle dynamics; and many detail variations could be suggested. But all the same elements would have to be included that are involved in the outline given above.

Astronavigation (or Astrogation)

Astronavigation is essentially a wedding of the techniques and sciences of astronomy and navigation, bearing heavily on the principles of celestial mechanics. Peculiarly, it has its place both as a development engineering and an operational science or profession. As a development engineering science, it is the one which generates the specification as to the overall performance requirements of a vehicle for a specified type of operation. And, while the astrodynamicist utilizes some practice in this area, and works with the astrogation engineer, it is the latter who carries full responsibility for the complete effects of orbital mechanics on even the more detailed aspects of performance and manoeuvering capabilities and requirements. He also must provide for the installation of all equipment required to meet the navigational needs of the specified type of operation for which the vehicle is intended.

This is a rather complex science. It must provide for not only the required operational accuracy of the navigational equipment, but also the corresponding performance tolerances and emergency capabilities of the vehicle as a whole. To do this, it must establish and fully explore the complete concept of every operational pattern that might be involved in missions which the vehicle is intended to perform. This in turn requires a complete application of the principles of celestial mechanics to such a mission, taking into account all factors that would appreciably affect the vehicle design and operational capabilities. However,

in spite of the rigorous and comprehensive requirements of this new science, it must be recognized that it is founded upon two quite well-established component sciences — celestial mechanics and navigation.

Essentially the work is that of devising and thoroughly studying applicable trajectories for the types of missions which represent the design objectives, and converting the results to quantities useful to the astrodynamist who must provide the vehicle performance capabilities in accordance with them. The other major part of the job (specifying and providing required navigational equipment) is equally straight-forward in essence. It involves, for navigation in space, mostly optical measuring equipment, backed up by suitable computing equipment. And, while the measuring equipment (for determining direction and distance) is largely optical, the same principles could utilize radio direction and ranging equipment as well (especially the latter).

While it is perhaps pointless to completely outline each of these sciences, since various arrangements are probably equally valid and applicable, the essential elements would include the following:

Trajectories

- Take-off and ascent
- Approach and landing

Orbits

- Celestial mechanics
- Satellite orbits
- Transfer orbits
- Earth-moon orbits
- Interplanetary orbits
- Perturbation and precession
- Tolerances and accuracy
- Spiral transfer
- Corrections

Measurement Equipment

- General
 - Functional requirements
 - Accuracy requirements
- Optical
- Radar
- Ground equipment

Computing Equipment

- Spaceborne equipment
- Ground mounted equipment
- Data transmitting and communication equipment

Equipment Installation Requirements

Performance Specifications

Spacecraft Propulsion

This branch of astronautical science is a most obvious one, and its importance is almost equally obvious. The output of the work of the engineers in this field serve as the most direct input to the work of the astrodynamist, just as the physical output of the propulsion system serves as the input to the vehicle's physical performance. This field is very similar in nature to the corresponding

aeronautical propulsion engineering, although the devices and their operating environment are entirely different, of course. But there is little need to outline this field, or to provide lengthy discussion.

It embraces all the propulsion devices capable of practical operation in space, selection of the most suitable types for specific application, the analysis of their performance, and installation requirements. Also included is the provision for powerplant auxiliary systems and accessories.

Just as historically the development of suitable propulsion devices has established the time of entry of all new vehicle types, so will astronautical progress be geared to the performance and skill of the spacecraft propulsion engineer.

Spacecraft Control Systems

Spacecraft control system engineering encompasses the systems required to provide stable behavior in accordance with directive guidance signals (either human or mechanical) by proper actuation of the devices which directly control the vehicle. This includes the gyros, autopilot amplifiers, mixers, servos, and many other similar systems and devices.

The engineers working in this field will be organized in a manner entirely similar to that for corresponding work in the guided missile field, and their work, and many of the devices used, will be similar. The main difference is that this field will demand an understanding of spaceship operating principles and requirements, and must be skilled in the application of this knowledge to the control system requirements.

These engineers will work very closely with the astrodynamist, who will provide the operating criteria of the end functional devices which accomplish the effects called for by the control system. The same full use of computers and simulators will be required in this area as is required in guided missile and high-speed aircraft control system work.

Spacecraft Guidance

Spacecraft guidance is comprised of the devices or systems which determine the path which a vehicle is to follow, and makes corrections thereto by a directive signal to the control system. These systems include such things as pre-set programming devices, inertial guidance systems radar, devices, computers, and many other devices of similar nature.

This applies most extensively to operation of vehicles operating between the Earth's surface and a satellite station. Beyond this, it is mostly a job for astroguidance, making use of settable programming devices. The guidance techniques used in the ascent to, and descent from, the satellite station, will be decidedly similar to those of guided missile guidance systems in general, as well as in many specific areas. The output of the guidance system, of course, supplies the control system input.

In spite of the similarity of this field to the corresponding area for guided missiles, there are important differences, which will require the engineer to be skilled specifically in the application of appropriate guidance techniques to this type of operation. And, likewise, he must understand the operating principles and characteristics of spacecraft. The importance of this is further emphasized by the fact that without good performance from the guidance equipment, there cannot be successful space flight. The guidance engineer must be capable of providing this.

Vol
1
195

Spacecraft Structure

The responsibility of spacecraft structures engineering is to provide for the integrity and efficiency of the vehicle structure — giving required strength at lightest practicable weight. This is accomplished by analyzing the stresses developed throughout the structure under the flight loadings determined by the astrodynamicist, and all other loadings applied to the vehicle. It also involves a careful record and control of the weight, balance, and moments of inertia of the structure and all other elements of total vehicle mass. In addition, any necessary testing is done to substantiate analysis and determine basic test data.

This is entirely analogous to the responsibilities and general methods of the aircraft structural engineer, but an understanding of the basic principles of space vehicles is required. Skill and experience must be developed by those engaged in this work to properly apply this understanding to the structures involved. The unique character of the loadings on a vehicle in free space must be appreciated, and the structure must be made as light as possible to obtain the highest possible mass ratios, and corresponding vehicle performance.

Spacecraft Design Engineering

This involves the responsibility for design of the vehicle structure and equipment installation, and its scope and nature are quite obvious. Equally obvious is the importance of providing highest quality design in order to produce the most efficient and lightweight design possible for the complete vehicle.

The many unique conditions encountered by these vehicles must be thoroughly understood, such as the fact that fuel outlets in the bottom of half-empty tanks would often become unported when thrust is cut off (even briefly), and that fuel might "fall" to the bottom of such a tank with disastrous impact when thrust is resumed, and a great many others. The designer will have to be thoroughly accustomed to this kind of thing, and capable of fully visualizing and solving such problems as these and the many others unique to this type of vehicle, in addition to the more conventional ones which are always encountered. All equipment installation will have to correctly take into account the operating characteristics and environment of this type of vehicle.

Spacecraft Equipment Engineering

This will be a most interesting field, because it must provide not only the standard kinds of equipment adapted to the special environment of spacecraft, but also the special equipment which will be needed, such as special windows, cabin air purifying, processing and regulating equipment, fully adjustable and convertible acceleration chair type seats, special equipment for operating by the crew during acceleration, etc. All equipment will have to be immune to the effects of weightlessness and acceleration.

Of course, it goes almost without saying that the demand for high operating reliability of all equipment will be very great. Control system equipment will have to be designed for operation by the crew members during acceleration, and visual indicating equipment will have to be readable during changing exterior lighting conditions during acceleration periods without undue attention by the crew. Communication equipments, such as headsets, will have to remain in place and functional during acceleration. These examples show that the whole area is fraught with challenge for the equipment engineer.

General

Aside from the engineering and scientific fields associated directly with the development of the vehicle, aeronautics offers several other new fields of engineering, or interesting new variations of old fields.

One example would be *Space Construction Engineering*, which would be essentially civil engineering under entirely new conditions. By way of illustration, design and construction of the satellite station would be a new kind of civil engineering, encountering complete weightlessness, synthetic (centrifugally induced) gravity varying throughout the structure, maintenance provisions for windows exposed to free space, self-contained air-conditioning, and power generation requirements, etc. (A whole paper could easily be written on this, alone.) And construction of a base on the moon would be an equally unique and challenging civil engineering job.

Another important area would be *Ground Support Equipment Engineering*, including launching docks, vehicle erecting and handling equipment, test equipment, communications and tracking networks, etc.

Still another would be *Space Operations Engineering*, for scheduling, coordinating, and controlling launching, maintenance, and supply operations, etc. Both the importance and uniqueness of this field are equally obvious.

While many of these fields have new elements, or involve new conditions or environments for application of old elements, nevertheless, they nearly all involve techniques (and, in many cases, equipment) similar enough to corresponding aspects of aircraft or guided missile work (especially ballistic missiles) and, in some cases, astronomy, that *those already in these fields should have little difficulty, in the early state of the art, in adapting their talents and experience to corresponding fields in aeronautics.*

Summary

The main component scientific areas that could logically combine to make up the complete field of aeronautics have been suggested in the preceding discussion, and something about the responsibilities and nature of each and the way they would work together has been given. Undoubtedly there are a few others, such as training, landing gears, etc., and many more that would be indirectly involved through related activities and applications (such as spaceborne reconnaissance, astronomy, astro-geology, etc.), but a fairly complete organizational entity is formed by those presented.

The most outstanding new science that emerges from this is that which was termed *astrodynamics*, which seems to logically fit an area required in aeronautical science, just as the science of aerodynamics emerged and firmly took its place early in the development of aeronautical science.

The organization suggested herein, while it seems to be a logical one, might not be the only one which could be suggested to fit the needs of aeronautics.

If the organization suggested here requires adjustment or revision, then it would seem to be a proper task for the IAF to generate and institute such adjustment and promote its early adoption.

At any rate, a rapidly initiated proper plan of organization is required, and would be highly preferable to the much slower evolutionary process that would otherwise be entailed. If we wish to promote the development of aeronautics, then as with any new science, we must guide its establishment in an efficient manner by establishing an effective organization of the science to promote steady progress from the beginning.

Vol.
1
1955

Buchbesprechungen — Book Reviews — Comptes rendus

Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß, Innsbruck, 5. bis 7. August 1954. Im Auftrage der Österreichischen Gesellschaft für Weltraumforschung herausgegeben von F. HECHT. Mit 165 Abb., VI, 307 S. Wien: Springer-Verlag. 1955. S 348.—, DM 58.—, \$ 13.80, sfr. 59.30. Vorzugspreis für Mitglieder der IAF und Bezieher der „Astronautica Acta“ S 278.40, DM 46.50, \$ 11.05, sfr. 47.50.

Dieser stattliche Band umfaßt die Wiedergabe aller in Innsbruck gehaltenen Fachvorträge (mit Ausnahme der in den „Astronautica Acta“ erschienenen) über die verschiedensten Probleme der Astronautik. WERNHER VON BRAUN hat diesem Werk ein kurzes, in englischer Sprache abgefaßtes Vorwort gewidmet, in dem er die Meinung ausspricht, daß die Forschung bei der Eroberung des Raumes durch den Menschen wohl die wichtigste Rolle spielt. In diesem Sinne sind auch die 26 Referate aus den verschiedensten Gebieten der Astronautik aufzufassen, auf die einzeln einzugehen zu weit führen würde. Von den behandelten Themen seien lediglich die folgenden herausgegriffen, ohne daß damit die Vielfalt der besprochenen Einzelprobleme erschöpft wäre: Verbrennungsprozesse, elektrischer Raumschiffantrieb, Steuerung von Fernraketen, Erforschung der hohen Atmosphäre mit Raketen im Geophysikalischen Jahr 1957-58, hochtemperaturbeständige Werkstoffe, Raumfahrtrecht, Bahnen und geodätische Bedeutung künstlicher Satelliten, Rückkehr geflügelter Lastraketen von Außenstationsbahnen, Entwicklung der Astronautik in den Vereinigten Staaten von Amerika. Alle Arbeiten stehen auf einem hohen wissenschaftlichen Niveau; einige sind im Hinblick auf die Verwirklichung des „Project MOUSE“ besonders aktuell. In den Beiträgen von Autoren aus drei Erdteilen spiegelt sich die weltweite Universalität des Raumfahrtgedankens wider. Jedem Beitrag, der in der Originalsprache (deutsch, englisch, französisch oder italienisch) abgedruckt ist, wurde eine Kurzfassung in der Originalsprache vorangestellt. Dieser Band stellt bei der Fülle der dargebotenen Beiträge für jede Bibliothek eine unentbehrliche Bereicherung der ernsthaften Raumfahrtliteratur dar, wobei noch besonders die hervorragende buchtechnische Ausstattung dieses Kongreßberichtes hervorgehoben sei.

E. DOLEZAL, Wien.

Die Wege des Strahlfluges. Von E. SÄNGER. (Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Physik der Strahltriebe e.V.: Heft 3.) Mit 2 Textabb., 14 S. München: R. Oldenbourg. 1955. DM 5.20.

Die vorliegende Arbeit aus dem SÄNGERSchen Forschungsinstitut befaßt sich in Form eines Vortrages mit dem psychologischen Anreiz zum Strahltrieb (dem jahrtausendealten Schnelligkeitsbedürfnis des Menschen) und der bisherigen wie auch der voraussehbaren künftigen Entwicklung des Strahltriebtes. Eine tabellarische Übersicht gibt Charakteristika und Bedeutung der heute interessanten zehn Grundsysteme der Strahltriebe für Unterschallluftfahrt, Überschallluftfahrt und Raumfahrt. MilitärLuftfahrt und -raumfahrt einerseits, zivile Luftfahrt und Raumfahrt anderseits werden einander gegenübergestellt. Dabei ergibt sich, daß der Aufwand für MilitärLuftfahrt und -raumfahrt derzeit um rund zwei Zehnerpotenzen höher ist als der für die zivile Luftfahrt!

Zivile Überschallluftfahrt fehlt noch völlig. Gleichwohl und trotz der Begrenzung durch die sogenannte thermische Mauer bei MACH-Zahlen um 4 (etwa 4000 km/h in der Stratosphäre) besteht für die zivile Überschallluftfahrt (Personenverkehr) ein Bedürfnis, da sie einen interkontinentalen Verkehr innerhalb weniger Stunden ermög-

lichen würde. Zivile (erdnahe) unbemannte Raumfahrt hingegen ist in Form der Raketensonden bereits für Zwecke der Geophysik, der astronomischen und kosmisch-physikalischen Forschung verwirklicht. Eine künftige Anwendung für den irdischen interkontinentalen Verkehr dürfte wegen der beträchtlichen Kosten nur für besondere Transportaufgaben vorbehalten bleiben.

SÄNGERS Vortrag zeigt im Zusammenhang mit diesem Überblick die Aufgabenstellungen des von ihm und seiner Gattin Dr. IRENE SÄNGER-BREDT geleiteten Forschungsinstitutes auf. Als Nahaufgabe wird beispielsweise die Schaffung stark verbilligter Flüssigkeitsraketen als Starthilfe für Staustrahlflugzeuge genannt. Ein weiteres Arbeitsgebiet wird das Studium der Einführung nuklearer Treibstoffe in den Staustrahlantrieb sein. Darüber hinaus aber befaßt sich das Institut schon heute im Auftrage großer Industrien mit einer Entwicklung der fernereren Zukunft, nämlich den Photonенstrahl- und Photonenstaustrahlantrieben.

Gemeinsame Schwerpunkte der militärischen und der zivilen Triebwerksforschung sind Staustrahltriebwerke, chemische Flüssigkeitsraketen und Photonenraketen, die daher zu den besonders bevorzugten Forschungszielen des Institutes gehören. Die Ergebnisse werden jeweils nach Freigabe durch die Auftraggeber in den im Oldenbourg-Verlag in München erscheinenden Institutsmitteilungen veröffentlicht werden.

Es ist anregend und faszinierend, den Ideen SÄNGERS, eines der Berufensten, zu folgen, die nicht nur die nahe, sondern auch die fernere Zukunft ins Auge fassen. Er vertritt mit Überzeugung den Standpunkt, daß der rasante Fortschritt der militärischen Entwicklungen jeden irdischen Krieg binnen kurzem sinnlos machen und die Militärraumfahrt automatisch in die zivile, insbesondere interplanetarische Raumfahrt überleiten wird. Wohl alle begeisterten Anhänger der Astronautik stimmen mit SÄNGER — zumindest in diesem *Wunsche* — aus ganzem Herzen überein.

F. HECHT, Wien.

Vol.
1
1955

Vol.
1
955